

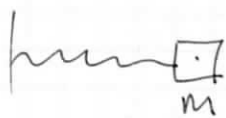
## Mechanika nieliniowa i chaos

- Odkrycia ostatnich kilkudziesięciu lat w układach opisywanych nieliniowymi równaniami ruchu może występować chaos. Chaos pojawia się w wielu różnych procesach
  - oscylacje układów mechanicznych
  - reakcjach chemicznych
  - przepływie płynów
  - pracy laserów
  - wzroście populacji i rozprzestrzenianiu się chorób

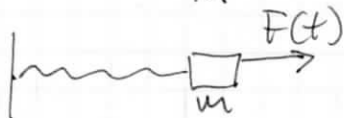
Mimo deterministycznego charakteru równań opisujących ewolucję układu (np. równania Newtona) jego szczegółowe zachowanie w przyszłości jest w praktyce niemożliwe do przewidzenia.

Aby układ wykazywał zachowania chaotyczne, równania opisujące jego ruch (ewolucję czasową) muszą być nieliniowe.

### Przykłady równań liniowych



$$m\ddot{x} = -kx$$

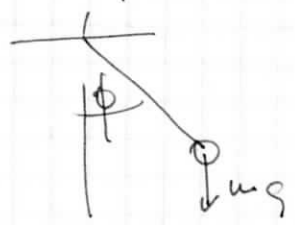


wywołana siła

$$m\ddot{x} = -kx + F(t)$$

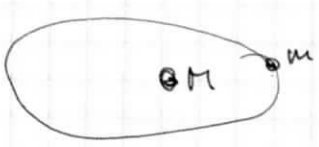
liniowe niejednorodne

### Przykłady równań nieliniowych



$$I \ddot{\phi} = M \leftarrow \text{moment siły}$$

$$mL^2 \ddot{\phi} = -mgL \sin \phi$$



$$m \ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2}$$

### Henri Poincaré (1854 - 1912)

Rozpatywał problem trzech ciał (opisany równaniami nieliniowymi!)

Zauważył, że rozwiązania mają szczególną własność, obecnie nazywaną wrażliwością na warunki początkowe (jedną z cech układu chaotycznego)

Spójnienia Poincaré przetrwały niezauważone przez fizyków aż do lat 70.

Dlaczego? - (I) rozwój, szczególniej teorii względności  
brak zainteresowania mechaniką klasyczną

(II) rozwój komputerów i numerycznych technik (algorytmów) obliczeniowych

**I** Nieliniowość jest warunkiem koniecznym wystąpienia chaosu, ale niewystarczającym.

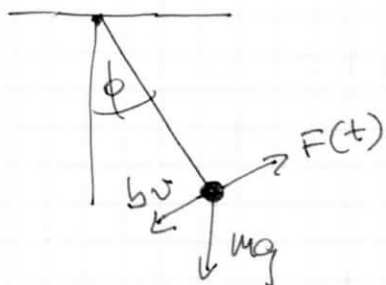
Równanie idealnego wahadła matematycznego jest nieliniowe, ale NIE prowadzi do chaosu!

Równanie musi być nieliniowe i dostatecznie skomplikowane!

np. tłumiony, wymuszony ~~oscylator~~ wahadło harmoniczny

$$mL^2 \ddot{\phi} = -mgL \sin \phi - bL^2 \dot{\phi} + LF(t)$$

tłumienie      wymuszenie



Porozważamy siłę reakcji w punkcie zawieszenia wahadła, gdyż nie daje wkładu do całkowitego momentu siły.

w dalszej dyskusji będziemy zakładali, że siła wymuszająca jest periodyczna.

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$F_0$  ← Amplituda siły wymuszającej  
 $\omega$  ← częstota wymuszenia

$$\ddot{\phi} + \frac{b}{m} \dot{\phi} + \frac{g}{L} \sin \phi = \frac{F_0}{mL} \cos \omega t$$

$\frac{b}{m} = 2\beta$  gdzie  $\beta$  - współczynnik tłumienia

$\frac{g}{L} = \omega_0^2$  - częstość własna wahadła

$\frac{F_0}{mL}$  - ma ten sam wymiar co  $\omega_0^2$

$$\frac{F_0}{mL} = \gamma \omega_0^2 \Rightarrow \gamma = \frac{F_0}{mL \omega_0^2} = \frac{F_0}{mg}$$

$\gamma$  - zredukowana amplituda wymuszenia

Jeżeli  $\gamma < 1$   $F_0 < mg$  nie jest możliwe utrzymanie wychylenia wahadła  $\phi_0 = 90^\circ$ .

$\gamma > 1$   $F_0 > mg$   $\phi \rightarrow \pi$  możliwe

$$\ddot{\phi} + 2\beta \dot{\phi} + \omega_0^2 \sin \phi = \gamma \omega_0^2 \cos \omega t$$

**TWN**

$$\sin \phi \approx \phi$$

$$\ddot{\phi} + 2\beta \dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = \gamma \omega_0^2 \cos \omega t$$

liniowe równanie niejednorodne

(Równanie tłumionego, wymuszonego, oscylatora harmonicznego)

$$\phi(t) = \underbrace{\phi_{hom}(t)}_{\text{hom}} + \underbrace{\phi_{szn}(t)}_{\text{part}}$$

Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$\omega_0 > \beta$

$\phi_{oj}(t) = A \exp(-\beta t) \cos(\omega_0 t + \alpha)$   
 $\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

$\omega_0 < \beta$

$\phi_{oj}(t) = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t}$   
 $\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$\omega_0 = \beta$

$\phi_{oj}(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t}$

$\phi_{part}(t) = \text{Re} \left\{ F_0 \chi(\omega) \exp(i\omega t) \right\}$   
 $\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega}$

Po dostatecznie długim czasie

$\phi(t) = B(\omega) \cos(\omega t + \delta(\omega))$        $B(\omega) = F_0 |\chi(\omega)|$   
 $t \gg \frac{1}{\beta}$

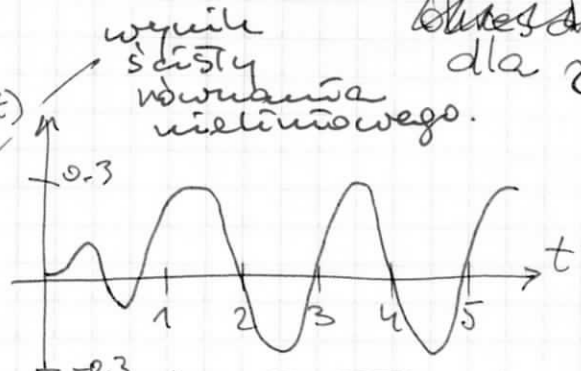
$\gamma \ll 1$  dla małych  $\gamma$  przybliżenie  $\sin \phi \approx \phi$  (małych drgań) jest prawdziwe

n.p.  $\gamma = 0.2$

$\omega_0 = \frac{3}{2} \omega$   
 $\beta = \frac{\omega_0}{4}$

czas uśredniony w jednostkach  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$   
dla  $\omega = 2\pi \Rightarrow \tau = 1$

Rozwiązania numeryczne dla równania TWW przy pomocy NDSolve w pakiecie Mathematica



$\phi(0) = 0$   
 $\dot{\phi}(0) = 0$

drgania sinusoidalne o okresie sily wymuszajacej

takie same drgania otrzymuje się dla dostatecznie dużych czasów nie zależnie od warunków początkowych

Człony przejściowe zanikają i układ zbliża się do jednoczesnie określonego "atraktora".

1. Istnieje jednorodny atraktor, do którego zbliża się, gdy uśrednienie od wybranych warunków początkowych.
2. Ruch odpowiadający temu atraktorowi ma charakter sinusoidalny z częstotścią dobitnie równą częstotliwości wymuszenia.

### Stabo nieliniowe oscylacje TWW

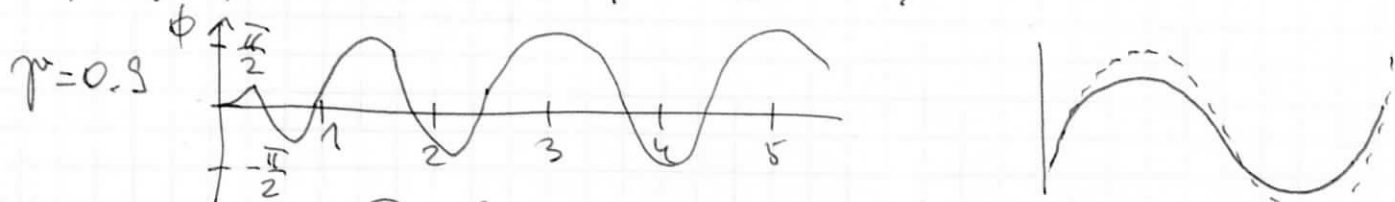
Zwiększamy amplitudę wymuszenia  $\gamma$

$$\sin \phi \approx \phi - \frac{1}{6} \phi^3$$

$$\cos^3 \phi = \frac{1}{4} (\cos 3\phi + 3 \cos \phi)$$

$$t \gg 1 \quad \phi^{(3)}(t) = A \cos(\omega t - \delta) + B \cos 3(\omega t - \delta) \quad B \ll A$$

Przy zwiększaniu  $\gamma$  w rozwiązaniu pojawi się mały przyrost oscylujący z częstotnością  $3\omega$



Ruch nie jest sinusoidalny, ale jest periodyczny o okresie wymuszenia

Dalsze zwiększanie  $\gamma$

$$\phi(t) = \phi^{(3)}(t) + \underbrace{C \cos n(\omega t - \delta)}_n$$

$$T = \frac{2\pi}{3\omega}$$

człony z wykreślni harmonicznych

Składowa harmoniczna rzędu  $n$  o częstotliwości  $n\omega$  jest funkcją okresową o okresie  $\tau_n = \frac{2\pi}{n\omega} = \frac{\tau}{n}$

W jednym okresie wymuszenia,  $n$ -ta harmoniczna oscyluje  $n$ -razy.

Ruch będący złożeniem wielu harmonicznych nadal będzie ruchem okresowym o tym samym okresie co wymuszenie.

### Oscylacje stabo nieliniowe $\gamma < 1$

Istnieje jednorodny atraktor o okresie równym  $\tau$  okresowi wymuszenia.

Dalsze związekanie  $\gamma \rightarrow$  zbliżanie się do układu chaotycznego

$\gamma = 1.06$



Układ zbliża się do atraktora o określonym okresie równym okresowi wymuszenia

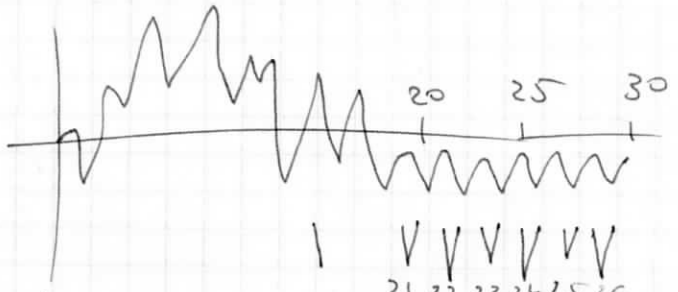
t	34	35	36	37	38	39
$\phi(t)$	6.0366	6.0367	6.0366	6.0366	6.0366	6.0366

Idealnie okresowy po 35 okresach wymuszenia.

Nie różni się pod tym względem od układu dla  $\gamma = 0.9$ .

Oscylacje z okresem 2

$\gamma = 1.073$



częstość z jaką powtarza się układ różni się od częstości wymuszenia (jest 2 razy ~~większa~~ <sup>mniej</sup> podharmoniczna)  
Okres podwaja się

Dominujący wkład ma człon  $A \cos(\omega t - \delta)$  niemniej  $\phi(t)$  z pewnością zawiera mały człon subharmoniczny o okresie 2.

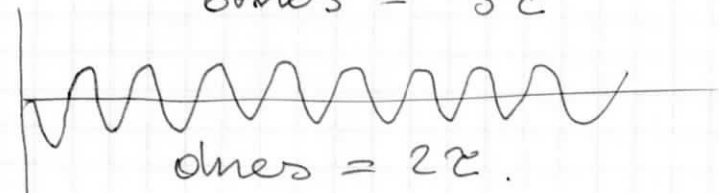
Oscylacje z okresem 3

$\gamma = 1.077$

$\phi(0) = 0$   
 $\dot{\phi}(0) = 0$



$\dot{\phi}(0) = 0$   
 $\phi(0) = -\frac{\pi}{2}$



W przypadku oscylatora nieliniowego różnym warunkom początkowym mogą odpowiadać różne atraktory.



# Kaskada podwojania okresu

Warunki brzegowe

$\phi(0) = -\frac{\pi}{2}$   $\phi(0) = 0$  prowadzi do istnienia różnej i przy tym bardzo ciekawej ewolucji.

$\gamma = 1.06$	dnies	$2$
$\gamma = 1.078$	dnies	$2^2$
$\gamma = 1.081$	dnies	$4^2$
$\gamma = 1.0826$	dnies	$8^2$

Wartość progowa  $\gamma^*$ , dla której następuje podwojenie okresu (punkt bifurkacji) jest trudna do określenia

dzięki się, że jest równa  $\gamma_1 = 1.0663$

$$2 \rightarrow 4$$

$$\gamma_2 = 1.0793$$

$$2^{n-1} \rightarrow 2^n$$

$$\gamma_n$$

Mitchell Feigenbaum (1944)

n	dnies	$\gamma_n$	$\gamma_n - \gamma_{n-1}$
1	$2 \rightarrow 4$	1.0663	
2	$4 \rightarrow 8$	1.0793	0.0130
3	$8 \rightarrow 16$	1.0821	0.0028
4	$16 \rightarrow 32$	1.0827	0.0006

$$\phi(0) = -\frac{\pi}{2} \quad \dot{\phi}(0) = 0$$

$$(\gamma_{n+1} - \gamma_n) \approx \frac{1}{\delta} (\gamma_n - \gamma_{n-1})$$

$$\delta = 4.6692016$$

Liczba Feigenbauma

↑  
stwierdzenie  
w granicy  $n \rightarrow \infty$   
 $\gamma_n \rightarrow \gamma_{kr} \quad (n \rightarrow \infty)$

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots < \gamma_{kr}$$

$$\underline{\gamma_{kr} = 1.0829}$$

Po przekroczeniu  $\gamma > \gamma_{kr}$  pojawia się chaos

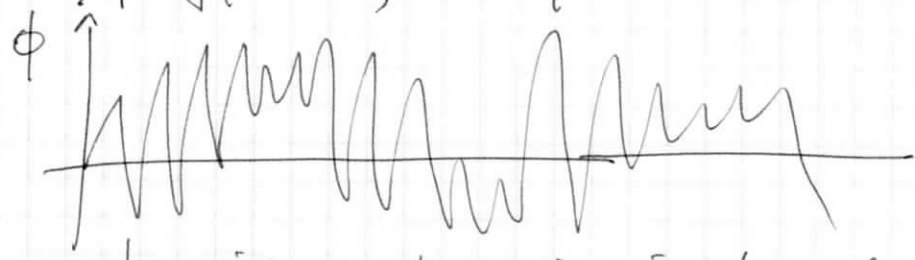
Kaskada podwojania okresu  $\rightarrow$  droga do chaosu

Jedną z możliwych dróg

Systemy wykazują chaos <sup>pojawia</sup> bez kaskady podwojania częstotliwości

# Chaos

jeżeli współczynnik  $\gamma > \gamma_{\text{lin}} = 1.0829$   
 to ruda naszego TWW przyjmuje postać,  
 której przyjęto się nazywać chaosem



$\phi$  nie wykazuje żadnych oznak  
 okresowości.

## Wrażliwość na warunki początkowe

Dwa identyczne wahadła  
 w chwili  $t=0$  niezrównane różne warunki początkowe  
 (np. wychylenia  $\phi(0)$  różniące się o stałą stopnia)

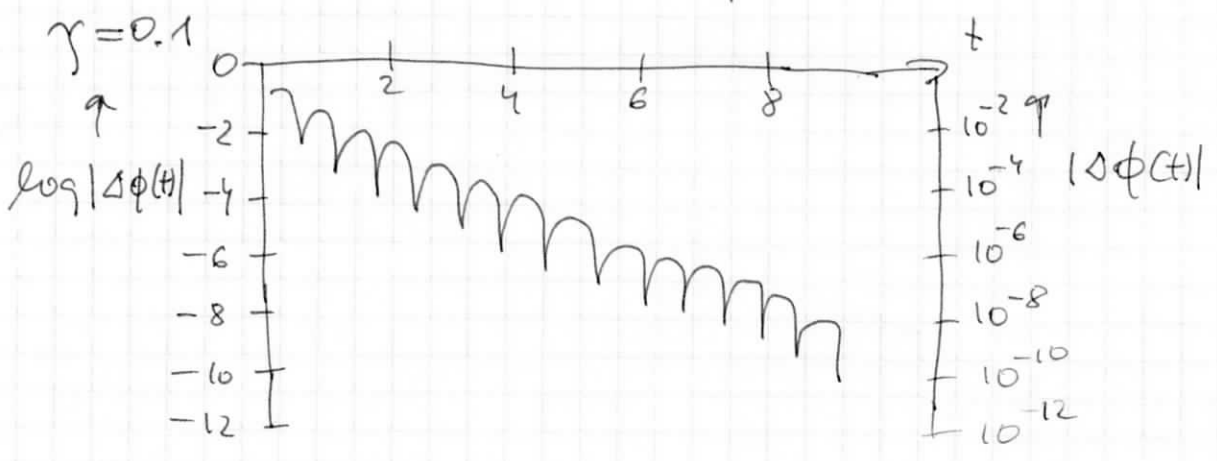
czy będą się różniły wychylenia obu wahadeł  
 w miarę upływu czasu?

$\phi_1(t)$  ;  $\phi_2(t)$       $\Delta\phi(t) := \phi_2(t) - \phi_1(t)$

W przypadku oscylatora liniowego

$$\Delta\phi(t) = D e^{-\beta t} \cos(\omega t - \delta)$$

$$\ln |\Delta\phi(t)| = \ln D - \beta t + \ln |\cos(\omega t - \delta)|$$



Oscylator liniowy jest niewrażliwy na warunki  
 początkowe

$\gamma = 1.105$





$$\gamma^* = 1.105$$

$$\Delta\phi(0) = 0.0001$$

$$\Delta\phi(16) = 3.5$$

4 razy wielkości!

Ruch chaotyczny wykazuje skrajnie dużo wrażliwość na warunki początkowe

Wykładnik Lapunowa

$$\Delta\phi(t) \sim Ke^{\lambda t}$$

obwiednia oscylacji

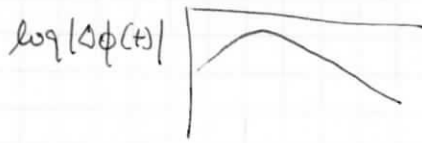
$\lambda < 0$  ruch nie jest chaotyczny (przyjmuje z czasem postać okresowych drgań)

$\lambda > 0$  ruch chaotyczny (nieregularny i ~~okresowy~~ nieokresowy)

Większe wartości  $\gamma^*$

Niespodzianka! dla  $\gamma^* = 1.13$  ruch jest okresowy  
okres =  $3\pi$

dla  $\gamma^* = 1.503$  chaotyczny  
okna ruchu okresowego!

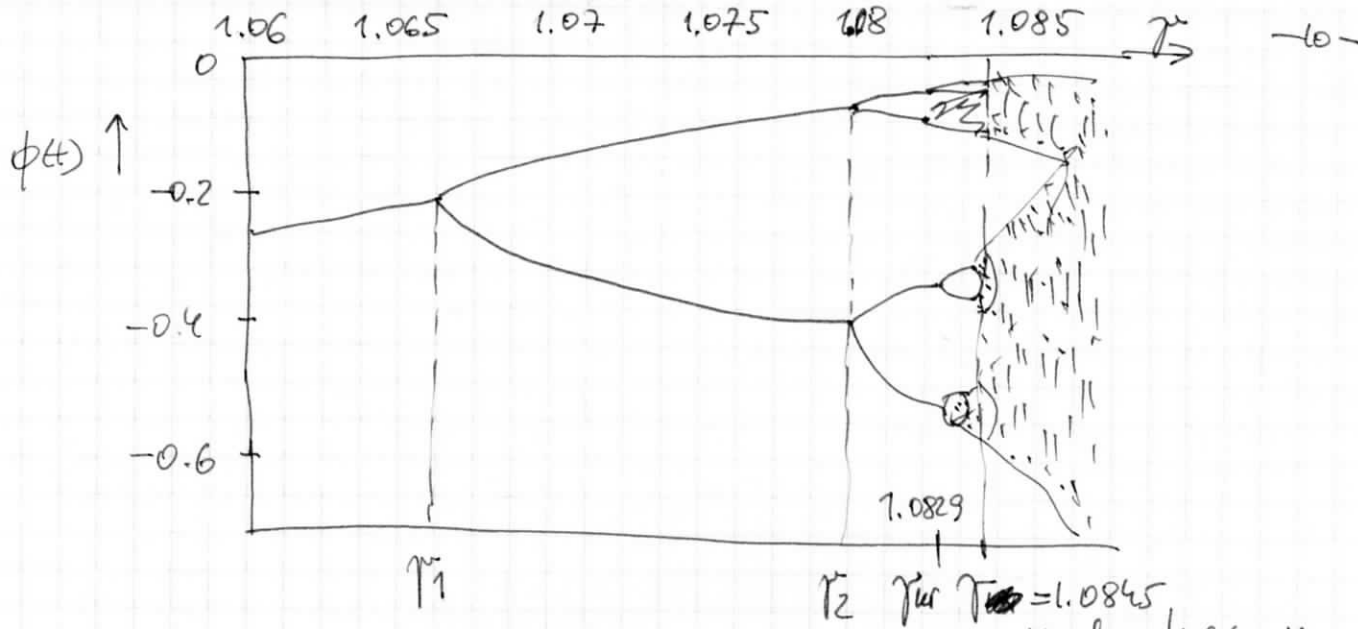


Diagramy bifurkacji

Zmiany okresu ruchu w funkcji  $\gamma^*$

Dla każdego  $\gamma^*$  wykreślamy  $\phi(n\pi)$  dla kilkuset  $n$   
up  $n \in [501, 600]$

Jeżeli funkcja  $\phi(t)$  ma okres <sup>rdowy okresowi</sup> wyjmuje jedną wartość  
to  $\forall n \phi(n\pi) = \phi$  jedna wartość  
Jeżeli okres jest rdowy 2  
 $\phi(n\pi)$  przyjmuje 2 wartości



kilkaset wartości  $\gamma$  (271)

Analiza dla większych  $\gamma$

$$\phi(t_0), \phi(t_0 + \epsilon), \phi(t_0 + 2\epsilon)$$

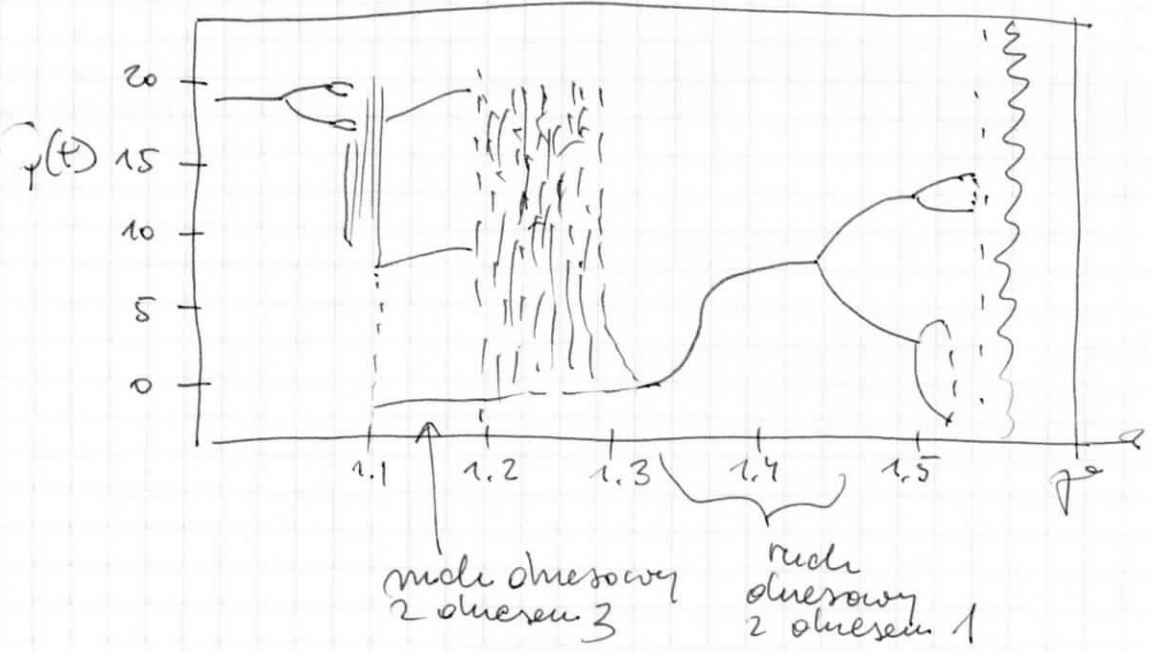
Nawet jeżeli układ jest okresowy mogą związać się o  $2\pi$ .

Zredukować  $\phi(t_0 + n\epsilon)$  do przedziału  $[-\pi, \pi]$

Wykreślić  $\dot{\phi}(t_0), \dot{\phi}(t_0 + \epsilon), \dot{\phi}(t_0 + 2\epsilon) \dots$

zamiast  $\phi(t_0)$

Podawanie  $2\pi$  do  $\phi$  nie ma wpływu na prędkość kątową



Dla  $\gamma = 1.4$  układ okresowy  
Po dwóch cyklach wymuszenia układ staje się okresowy.

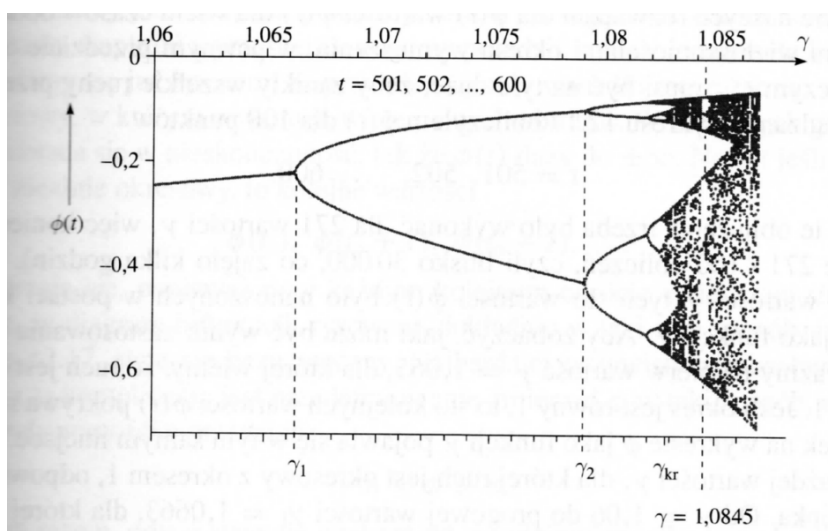
Mechanika nieliniowa i chaos  
na przykładzie  
**Tłumionego Wahadła z Wymuszeniem**

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2 \sin \phi = \gamma\omega_0^2 \cos \omega t$$

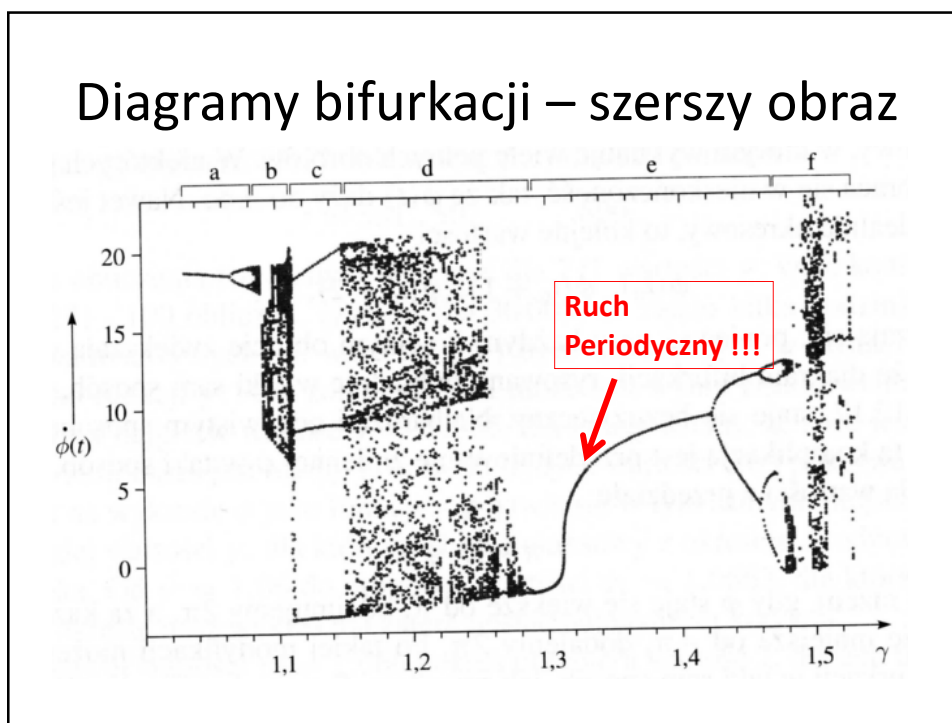
Trajektorie dla różnych wartości  
sily wymuszającej

$$\gamma = \frac{F_0}{mg}$$

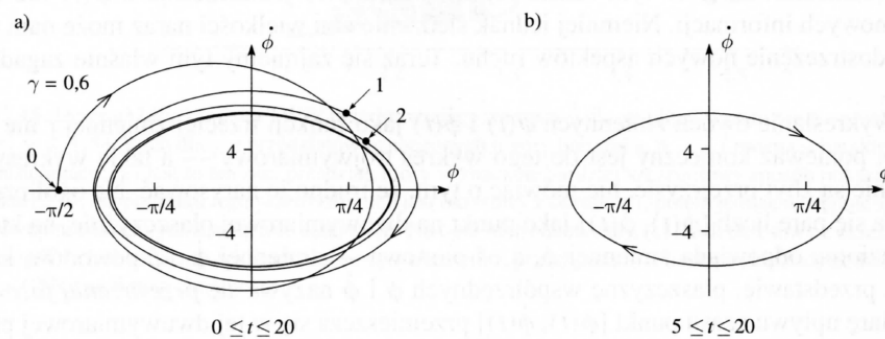
Diagramy bifurkacji



## Diagramy bifurkacji – szerszy obraz



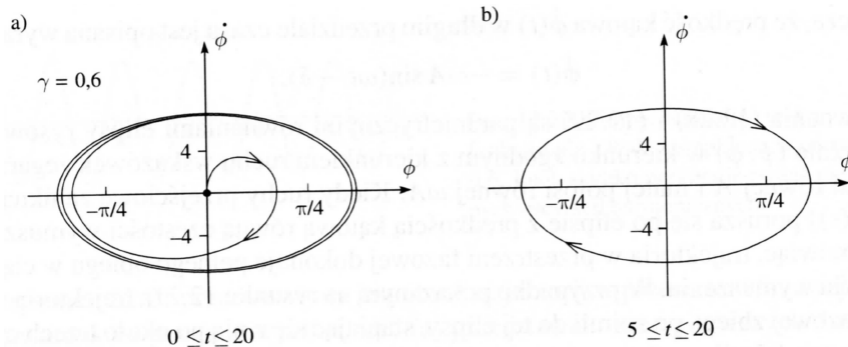
## Trajektorie w przestrzeni fazowej



**Trajektorie** ma kształt zwiijającej się spirali i zbiega do atraktora o okresie 1 (okresie siły wymuszającej)

$$\phi(t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

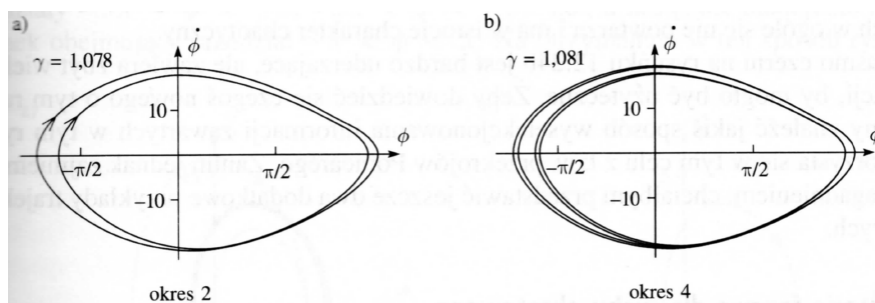
## Trajektorie w przestrzeni fazowej (2)



Inne warunki brzegowe niz poprzednio !

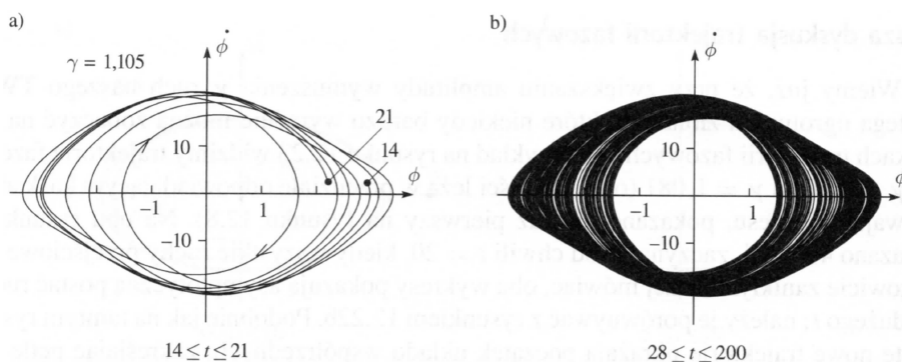
Ten sam atraktor !

## Trajektorie w przestrzeni fazowej (3)



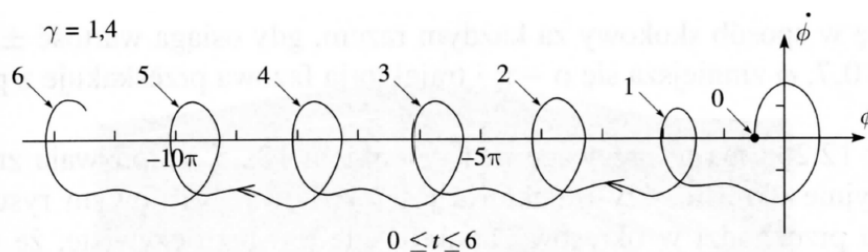
Ruch okresowy z wielokrotnoscia okresu siły wymuszającej

## Trajektorie w przestrzeni fazowej (4)



**Ruch chaotyczny (chaotyczny atraktor)**

## Trajektorie fazowe dla ruchu obrotowego

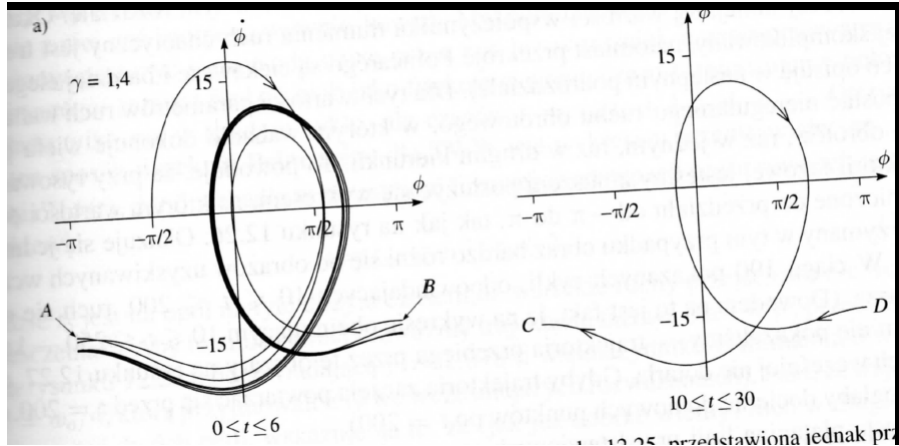


Trajektoria fazowa TWW dla  $\gamma=1.4$  obejmująca 6 pierwszych cykli wymuszenia

Trajektoria przedstawia ruch obrotowy, w którym  $\phi$  zmniejsza się o  $2\pi$  w każdym cyklu wymuszenia

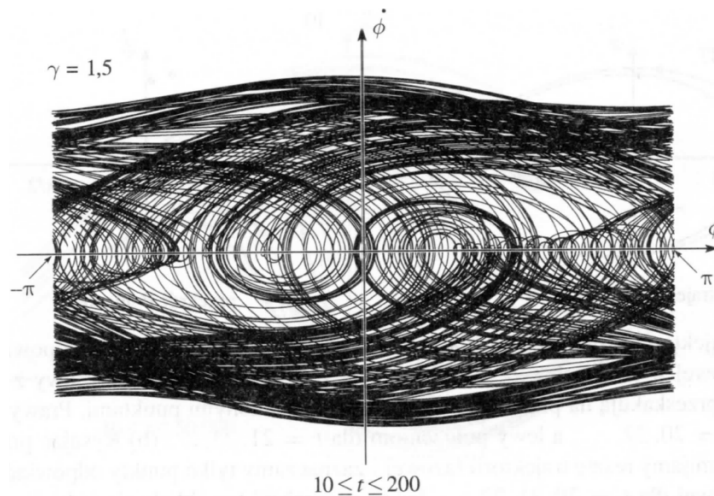


## Trajektorie fazowe dla ruchu obrotowego



$\phi$  zredukowane do obszaru  $-\pi < \phi < \pi$

## Trajektorie fazowe dla ruchu obrotowego



**Chaotyczna trajektoria fazowa**

## Odwzorowania logistyczne

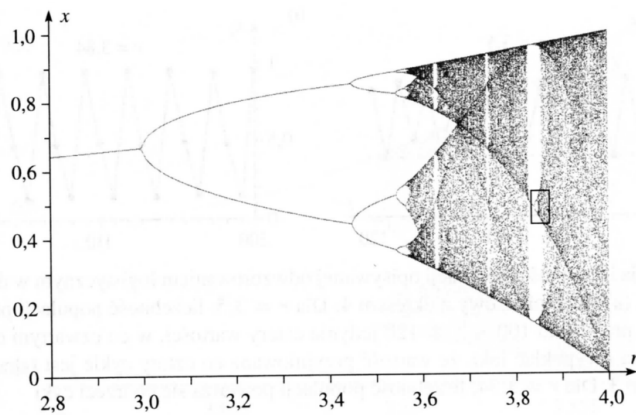


Diagram bifurkacji dla odwzorowania logistycznego

$$x_{t+1} = f(x) = rx_t(1 - x_t)$$

# Odwzorowania logistyczne

Problemy mechaniki  $q(t)$ , gdzie  $t$  zmienną ciągłą

Jakkolwiek czasami wygodnie 'dokonać' obserwacji' w dyskretnych punktach czasu

Np. entymologzy chcą znać liczebność populacji owadów w określonych chwilach czasu (np. raz do roku)

$$\text{np. } n_{t+1} = f(n_t)$$

$$x = \frac{n}{N} \quad x - \text{względna liczebność populacji}$$

$N$  - maksymalna możliwa liczebność populacji

$$x_{t+1} = f(x_t) = r x_t (1 - x_t)$$

$r$  - parametr tempa wzrostu

Rola atraktora petni punkt staty odwzorowania

$$x^* = f(x^*)$$

Stabilność punktów statych

$|f'(x^*)| < 1$ ,  $x^*$  jest stabilnym punktem statym i petni rolą atraktora

$|f'(x^*)| > 1$   $x^*$  jest niestabilnym punktem statym i petni rolą punktu odpychającego

Punkt staty może być stabilny lub niestabilny w zależności od  $r$

Choć nie jest to układ mechaniczny, to jego ewolucja ma wiele cech wspólnych z ewolucją wieliniowych układów mechanicznych.