WYKŁAD 10 (20.IV.2010)

Podstawowy problem mechaniki klasycznej
Znaleźć ruch układu N punktów materialnych w obecności K więzów.
Rozważamy tylko więzy holonomiczne

$\vec{r}_i \quad i=1,\dots N$ położenia p-któw w układzie kartezjańskim

Możemy wprowadzić przestrzeń współrzędnych kartezjańskich

$$x \equiv (x_1, x_2, x_3 \dots \dots x_{3N-1}, x_{3N}) \in \mathbb{R}^{3N}$$

Równania więzów

$$g_k(x,t) = 0 \qquad k = 1,\dots,K$$

$$f = 3N-K \quad \text{stopni swobody}$$

Sformułowanie newtonowskie Mech. klas.

$$\begin{cases} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{k=1}^{K} \lambda_k(x,\dot{x},t) \nabla_i g_k \\ g_k(x,t) = 0 \end{cases}$$

3N+K równań na 3N+K niewiadomych

Przez więzy mamy $3N-k=f$ stopni swobody wybierzmy więc f niezależnych zmiennych

$(q_1, \dots q_f) \equiv q$ takich, że

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q,t)$$

$$x = x(q,t)$$

i spełniających równania więzów tożsamościowo, czyli

$$g_k(x(q,t),t) = 0 \quad \forall k$$

Możemy wprowadzić siły uogólnione

$$Q_j := \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad j=1,\dots,f$$

i pokazać, że równania Newtona są wtedy równoważne równaniom Lagrange'a II rodzaju

czyli równania
$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0} \qquad j = 1 \ldots f$$

gdzie T - energia kinetyczna układu
$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)^2 = T(q, \dot{q}, t)$$

Jeżeli siły są potencjalne, tzn $\vec{F}_i = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial \vec{r}_i}$
to istnieje takie $V(q, t)$, że $Q_j = -\frac{\partial V(q, t)}{\partial q_j}$

Jeżeli wprowadzimy funkcję Lagrange'a
$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$
to równania Lagrange'a można zapisać
$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \qquad j = 1, \ldots f$$

Sformułowanie Newtonowskie i Lagranżowskie mechaniki dają równania ruchu drugiego rzędu w czasie.
Rozwiązanie równań daje $q(t) \to x(t)$

Oba sformułowania opisują ruch w przestrzeni położeń q — przestrzeni konfiguracyjnej

Ruch (zależność $q_j(t)$, $j = 1 \ldots f$) jest zadany przez n-równań różniczkowych drugiego rzędu

Z teorii równań różniczkowych wiadomo, że układ n równań 2 rzędu jest równoważny układowi $2n$ równań pierwszego rzędu

Zobaczymy jak można to wykorzystać w mechanice $\longrightarrow$ mechanika Hamiltonowska

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad \leftarrow \text{pędy uogólnione}$$

$\{q_i\}$ $i = 1 \ldots f$ — przestrzeń konfiguracyjna f-wymiarowa

$\{(q_i, p_i)\}$ — przestrzeń fazowa 2f-wymiarowa

W przestrzeni fazowej traktujemy p_i jako niezależne zmienne

Równania Lagrange'a $\xrightarrow[\text{Transformacja Legendre'a}]{}$ Równania Hamiltona

Transformacja Legendre'a

Funkcja $f(x,y)$, zmiennych x i y

Transf. Legendre'a opisuje przejście od zmiennych x, y do zmiennych (u, y) gdzie $u := \frac{\partial f}{\partial x}$ i nowej funkcji $g(u,y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = u\,dx + v\,dy$$

gdzie $u := \frac{\partial f}{\partial x}$ i $v := \frac{\partial f}{\partial y}$

Weźmy nową funkcję $g := f - ux$

$$dg = df - u\,dx - x\,du = v\,dy - x\,du$$

g - możemy uważać za funkcję zmiennych u i y

$$g = g(u,y)$$

$$dg = \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial y}dy \longrightarrow v := \frac{\partial g}{\partial y} \qquad x = -\frac{\partial g}{\partial u}$$

Weźmy $f \equiv L(\dot{q}, q)$ $\quad x \equiv \dot{q}$, $y \equiv q$

$$u \equiv p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \qquad v = \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \dot{p}$$

$$v = \frac{\partial g}{\partial y} \longrightarrow \dot{p} = \frac{\partial g}{\partial q}$$

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u} \longrightarrow \dot{q} = -\frac{\partial g}{\partial p}$$

$g = -H \leftarrow$ funkcja Hamiltona

Równania Hamiltona

$$\boxed{H(p,q,t) := \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)}$$

funkcja Hamiltona

$$dH = \sum_{i=1}^{f}\left(\dot{q}_i dp_i + \cancel{p_i d\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

równ. Lagr. II rodzaju

$$= \sum_{i=1}^{f}\left(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

H jest funkcją $2f+1$ zmiennych q, p, t

$$dH = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad i = 1 \ldots n}$$

szukane równania ruchu dla niezależnych zmiennych q i p

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Jednoznaczne rozwiązanie wymaga zadania $2n$ wartości początkowych $q_i(t_0)$ i $p_i(t_0)$

Bardzo ogólnie, układy, które dają się opisać przez funkcję $H(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n, t)$ i układ równań

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

nazywają się układami Hamiltonowskimi

albo układami kanonicznymi

nie tylko w Mechanice, ale także w

* Elektrotechnice
* Biologii
* Meteorologii
* Ekonomii

Przykłady

(1) Ruch płaski swobodnego punktu opisany we współrzędnych polarnych

$$L(r,\dot r,\dot\varphi)=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)$$

$$\left.\begin{aligned}p_r&=\frac{\partial L}{\partial\dot r}=m\dot r\\ p_\varphi&=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=mr^2\dot\varphi\end{aligned}\right\}\longrightarrow\quad\begin{aligned}\dot r&=\frac{p_r}{m}\\ \dot\varphi&=\frac{p_\varphi}{mr^2}\end{aligned}$$

$$H(r,p_r,p_\varphi)=\dot r p_r+\dot\varphi p_\varphi-L=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

(2) Ruch cząstki w potencjale

$$L=\frac{m\dot{\vec r}^2}{2}-V(\vec r,t)=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)-V(x,y,z,t)$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial\dot x}=m\dot x\ ;\quad p_y=m\dot y\ ;\quad p_z=m\dot z$$

Funkcja Hamiltona

$$H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+V(x,y,z,t)=$$

$$=\frac{1}{2m}\vec p^{\,2}+V(\vec r,t)$$

Kanoniczne równania Hamiltona

$$\dot p_x=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial V}{\partial x}\qquad \dot x=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m}$$

itd. dla p_y, p_z, y, z

$$\dot{\vec p}=-\operatorname{grad}V(\vec r)\qquad \dot{\vec r}=\frac{\vec p}{m}\qquad \text{równ. Hamiltona}$$

Równoważność z równaniami Lagrange'a i Newtona $m\ddot{\vec r}=-\operatorname{grad}V(\vec r)$ jest tutaj oczywista.

Ważne: funkcja Hamiltona jest funkcją q i p

czyli $\dot{q}$ muszą być wyrażone przez q, p, t

$$\dot{q} = \dot{q}_i(q, p, t)$$

$$\boxed{H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i(q,p,t)p_i - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)}$$

Ćwiczenia: funkcja Hamiltona dla cząstki w jednorodnym polu magnetycznym.

PRZYKŁADY

Funkcja Hamiltona a Energia

$$H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - T + V$$

Dla więzów skleronomicznych, holonomicznych, nieruchomych układów, sił ~~potencjalnych~~ zachowawczych

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

$\Rightarrow$ $\boxed{H = T + V = E}$ dla więzów skleronomicznych, holonomicznych, nieruchomych układów i sił zachowawczych

Dla tego przypadku można znaleźć funkcję Hamiltona bez konieczności znalezienia najpierw funkcji Lagrange'a.

Kiedy H jest całką ruchu?

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$

H jest całką ruchu, wtedy gdy nie zależy explicite od czasu.

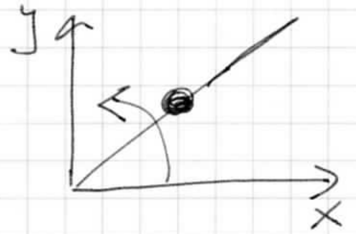
Fakt, że $H = E =$ energia całkowita i fakt, że H jest stałą ruchu są niezależne od siebie.

możliwe przypadki

- $\frac{dH}{dt} = 0$ ale $H \neq E$

Przykład

Perła na obracającym się drucie w płaszczyźnie



- więzy są reonomiczne $\varphi = \omega t$
- $V = 0$

$$L = T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) = E_{perła}$$

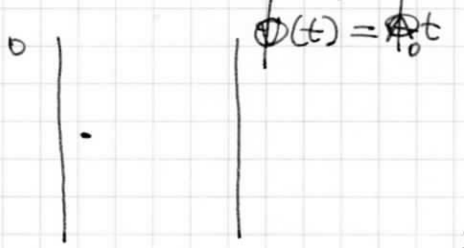
$$H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{m}{2} r^2\omega^2 \neq E_{perła}$$

L i H nie zależą explicite od czasu (~~nawet~~ jest to możliwe nawet dla reonomicznych więzów).

- $\frac{dH}{dt} \neq 0$ ale $H = E$

Przykład

Elektron w płaskim kondensatorze



$$V = -e\phi_0 t \cdot x = -Atx$$

$$T = \frac{p^2}{2m}$$

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} - Atx = E$$

$\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$ Rozwiązanie $x(t) = \frac{A}{6m} t^3$

Ważność równań Hamiltona

- nie leży w tym, że równania Hamiltona umożliwiają łatwiejszy sposób znalezienia równań ruchu
- stanowią punkt startowy formalizmu ważnego dla mechaniki fizyki statystycznej mechaniki kwantowej
- ułatwiają badanie układów chaotycznych

równania Hamiltona opisują ruch układu ~~pkt~~ punktów materialnych w przestrzeni fazowej

q i p są niezależnymi zmiennymi i całkowicie "równouprawnionymi"

Nawiasy Poissona

"Obserwabla" różniczkowalna funkcja zmiennych $q_i(t)$, $p_i(t)$, t

$$f(q, p, t)$$

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

kanoniczne równania Hamiltona

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Jeżeli mamy dwie funkcje $f(q, p, t)$, $g(q, p, t)$

definiujemy nawias Poissona

$$\boxed{\{f, g\}_{q,p} := \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)}$$

OPUSZCZAMY ZMIENNE, NAJCZĘŚCIEJ JEST TO JASNE

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Ewolucja czasowa "obserwabli" jest dana przez nawias Poissona "obserwabli" i funkcji Hamiltona, jest więc określona przez funkcję Hamiltona.

- f nie zależy eksplicite od czasu $\left(\frac{\partial f}{\partial t} = 0\right)$

$$(f \text{ jest stałą ruchu}) \Leftrightarrow (\{f, H\} = 0)$$

Weźmy (i) $f = p_j$

$$\{p_j, g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial p_j}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial g}{\partial q_j}$$

(ii) $f = q_j$

$$\{q_j, g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Równania Hamiltona można zapisać przy pomocy nawiasów Poissona

Weźmy teraz $g = H$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\{p_i, H\} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\}$$

$$\underline{\dot{q}_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \underline{\{q_i, H\}} \quad ; \quad \underline{\dot{p}_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \underline{\{p_i, H\}}$$

Wiele interesujących własności / $\{f, g\} = -\{g, f\}$

n.p.

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

<u>Przykład</u> Oscylator Harmoniczny (1D problem)

$$T = \frac{p^2}{2m} \qquad V = \frac{K}{2}x^2 \qquad H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{K}{2}x^2$$

$$H(p, x)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \{x, H\} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= \{p, H\} = -Kx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{K}{m}x$$

<u>Znaczenie Nawiasów Poissona</u>

- Oczywiście dla mechaniki
- Analogia pomiędzy mechaniką klasyczną a kwantową

<u>Mech kl</u>	<u>Mech kwantowa</u>
f obserwabla	operator $\hat{F}$ w przestrzeni Hilberta
H – funkcja Hamiltona	$\hat{H}$ operator Hamiltona
$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$	$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}$

$$[A, B] := AB - BA$$

komutator