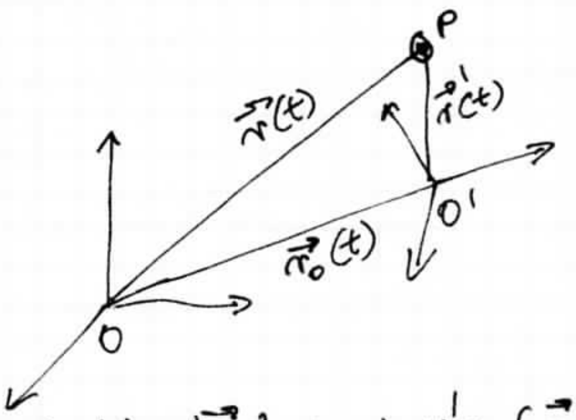
Prędkość i przyspieszenie w ruchu względnym



Rozważamy dwa kartezjańskie układy współrzędnych

1) $U: \{\vec{e}_i\}, O$ 2) $U': \{\vec{e}_i'\}, O'$

PYTANIE:

Jaki związek istnieje między wielkościami charakteryzującymi ruch punktu materialnego odniesiony
raz do układu U
drugi raz do układu U'

$\vec{r}(t) = \vec{OP}$, $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ w układzie U

promień wodzący, prędkość, przyspieszenie

$\vec{r}'(t) = \vec{O'P}$, $\vec{v}'(t)$, $\vec{a}'(t)$ w układzie U'

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$$
$$\vec{OP} = \vec{O'P} + \vec{OO'}$$

Jeżeli chcemy ustalić związek między prędkościami v i $\vec{v}'$ punktu materialnego P względem układów U i U' musimy się zastanowić, jak są powiązane ze sobą zmiany położenia punktu P liczone względem układów U i U'.

Weźmy dowolny wektor $\vec{b}$

$d\vec{b}$ – infinitezymalna zmiana (różniczka) dowolnego wektora $\vec{b}$ względem układu U

$d\vec{b}'$ – względem układu U'

Niech zmiany następują w przedziale czasowym $\langle t, t+dt \rangle$

$$\frac{d\vec{b}}{dt}\Big|_U \quad i \quad \frac{d\vec{b}}{dt}\Big|_{U'} \equiv \frac{d'\vec{b}'}{dt}$$

Infinitezymalna zmiana położenia punktu materialnego P względem układu U będzie $d\vec{r}$, U' będzie $d'\vec{r}'$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \vec{v}' = \frac{d'\vec{r}'}{dt} \quad \vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt}$$

Układ U spoczywa, układ U' porusza się

Pokażemy, że

$$\boxed{\frac{d\vec{b}}{dt}\Big|_U = \frac{d\vec{b}}{dt}\Big|_{U'} + \vec{\omega}\times\vec{b}}$$

i wprowadzimy $\vec{\omega}$ – prędkość kątową

Ta relacja jest czasami zapisywana w ~~wekto~~ operatorowej formie

$$\frac{d}{dt}\Big|_U = \frac{d}{dt}\Big|_{U'} + \vec{\omega}\times .$$

Prędkość i przyspieszenie punktu materialnego P względem układu U i U'

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_U \qquad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}\Big|_{U'}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_U \qquad \vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}\Big|_{U'}$$

Szukamy związków pomiędzy tymi wielkościami

Obserwator w układzie U' obserwuje wielkość wektorową $\vec{A} = a_1'\vec{e}_1{}' + a_2'\vec{e}_2{}' + a_3'\vec{e}_3{}'$ i wyznacza jej pochodną czasową

$$\frac{da_1'}{dt}\vec{e}_1{}' + \frac{da_2'}{dt}\vec{e}_2{}' + \frac{da_3'}{dt}\vec{e}_3{}'$$

Później spostrzega, że jego układ odniesienia obraca się (rotuje) względem spoczywającego układu U.

Jaką wartość ma pochodna czasowa wektora $\vec{A}$ dla obserwatora spoczywającego w układzie U

Dla obserwatora w układzie U (spoczywającym) wektory $\vec{e}_i{}'$ zmieniają się w czasie

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(a_1'\vec{e}_1{}' + a_2'\vec{e}_2{}' + a_3'\vec{e}_3{}') =$$

$$= \frac{da_1'}{dt}\vec{e}_1{}' + \frac{da_2'}{dt}\vec{e}_2{}' + \frac{da_3'}{dt}\vec{e}_3{}' + a_1'\frac{d\vec{e}_1{}'}{dt} + a_2'\frac{d\vec{e}_2{}'}{dt} + a_3'\frac{d\vec{e}_3{}'}{dt}$$

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_U = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{U'} + a_1'\frac{d\vec{e}_1{}'}{dt} + a_2'\frac{d\vec{e}_2{}'}{dt} + a_3'\frac{d\vec{e}_3{}'}{dt}$$

$\vec{e}_i{}'$ - wektory jednostkowe $(i=1,2,3)$

$$\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_i{}' = 1$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_i{}') = 0 \rightarrow 2\vec{e}_i{}' \cdot \frac{d\vec{e}_i{}'}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{e}_i{}' \perp \frac{d\vec{e}_i{}'}{dt}}$$

$\frac{d\vec{e}_i{}'}{dt}$ leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez $\vec{e}_j{}'$ i $\vec{e}_k{}'$ $(j \neq k \neq i)$

! [w podprzestrzeni rozpiętej przez te wektory]

(i) $$\frac{d\vec{e}_1{}'}{dt} = \alpha_1\vec{e}_2{}' + \alpha_2\vec{e}_3{}'$$

(ii) $$\frac{d\vec{e}_2{}'}{dt} = \alpha_3\vec{e}_3{}' + \alpha_4\vec{e}_1{}'$$

(iii) $$\frac{d\vec{e}_3{}'}{dt} = \alpha_5\vec{e}_1{}' + \alpha_6\vec{e}_2{}'$$

$$\vec{e}_2{}' \cdot \frac{d\vec{e}_1{}'}{dt} = \alpha_1 \qquad \vec{e}_1{}' \cdot \frac{d\vec{e}_2{}'}{dt} = \alpha_4$$

$$\vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_2{}' = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_2{}') = 0 \qquad \vec{e}_1{}' \cdot \frac{d\vec{e}_2{}'}{dt} + \frac{d\vec{e}_1{}'}{dt} \cdot \vec{e}_2{}' = 0$$

$$\alpha_4 + \alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_4 = -\alpha_1$$

Podobnie

$$\alpha_5 = -\alpha_2$$

$$\alpha_6 = -\alpha_3$$

$$\frac{d\vec{e}_1{}'}{dt} = \alpha_1 \vec{e}_2{}' + \alpha_2 \vec{e}_3{}'$$

$$\frac{d\vec{e}_2{}'}{dt} = \alpha_3 \vec{e}_3{}' - \alpha_1 \vec{e}_1{}'$$

$$\frac{d\vec{e}_3{}'}{dt} = -\alpha_2 \vec{e}_1{}' - \alpha_3 \vec{e}_2{}'$$

$$a_1' \frac{d\vec{e}_1{}'}{dt} + a_2' \frac{d\vec{e}_2{}'}{dt} + a_3' \frac{d\vec{e}_3{}'}{dt} = (-\alpha_1 a_2' - \alpha_2 a_3')\vec{e}_1{}' + (\alpha_1 a_1' - \alpha_3 a_3')\vec{e}_2{}' + (\alpha_2 a_1' + \alpha_3 a_2')\vec{e}_3{}'$$

Wprowadzimy teraz wielkość $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1{}' + \omega_2 \vec{e}_2{}' + \omega_3 \vec{e}_3{}'$$

i zdefiniujemy

$$\omega_1 := \alpha_3 = \frac{d\vec{e}_2{}'}{dt} \cdot \vec{e}_3{}'$$

$$\omega_2 := -\alpha_2 = -\frac{d\vec{e}_1{}'}{dt} \cdot \vec{e}_3{}'$$

$$\omega_3 := \alpha_1 = \frac{d\vec{e}_1{}'}{dt} \cdot \vec{e}_2{}'$$

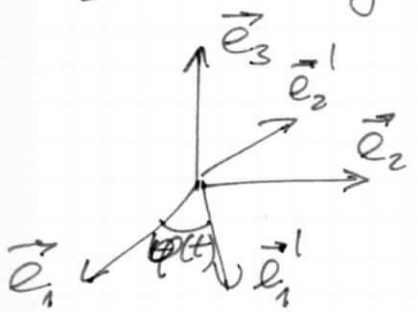
wtedy $\boxed{\sum_i a_i' \frac{d\vec{e}_i{}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}}$ Sprawdzić w domu!

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_U = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{U'} + \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

Wektor $\vec{\omega}$ – prędkość kątowa poruszającego się układu względem układu spoczywającego

Znając zależności $\vec{e}_i{}'(t)$ można wyznaczyć składowe wektora prędkości kątowej.

Rozważmy przykład



$$\vec{e}_3^{\,\prime} = \vec{e}_3 \qquad \varphi(t) = \omega_0 t$$

$$\vec{e}_1^{\,\prime}(t) = \vec{e}_1 \cos\varphi(t) + \vec{e}_2 \sin\varphi(t)$$

$$\vec{e}_2^{\,\prime}(t) = \vec{e}_1 \cos\left[\varphi(t) + \tfrac{\pi}{2}\right] + \vec{e}_2 \sin\left[\varphi(t) + \tfrac{\pi}{2}\right] = -\vec{e}_1 \sin\varphi(t) + \vec{e}_2 \cos\varphi(t)$$

$$\frac{d\vec{e}_1^{\,\prime}(t)}{dt} = (-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2)\cdot\omega_0$$

$$\frac{d\vec{e}_2^{\,\prime}(t)}{dt} = (-\cos\varphi\, \vec{e}_1 - \sin\varphi\, \vec{e}_2)\cdot\omega_0$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = \omega_0$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec{n} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

oś obrotu

Generalnie dowolny obrót można przedstawić jako obrót wokół chwilowej osi obrotu $\vec{n}$ o kąt φ

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n}}$$

Szczególne przypadki

$\vec{A} = \vec{r}^{\,\prime}$

$$\left.\frac{d\vec{r}^{\,\prime}}{dt}\right|_U = \left.\frac{d\vec{r}^{\,\prime}}{dt}\right|_{U'} + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,\prime}$$

$$= \vec{v}^{\,\prime} + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,\prime}$$

pamiętamy, że $\vec{r}^{\,\prime} = \vec{r} - \vec{r}_0$

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_U = \underbrace{\frac{d\vec{r}_0}{dt}}_{} + \left.\frac{d\vec{r}^{\,\prime}}{dt}\right|_{U'} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{v}^{\,\prime} + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,\prime}$$

TRANSFORMACJA PRĘDKOŚCI

prędkość ~~unoszenia~~ translacyjna $\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_{tr}$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}^{\,\prime} + \underbrace{\vec{v}_{tr} + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,\prime}}_{\vec{v}_0}}$$

Prędkość unoszenia punktu $\vec{r}^{\,\prime}$ przez układ U'

przedstawia prędkość punktów spoczywających w układzie U' względem układu U.

W2-2

Obrót scharakteryzowany przez chwilową oś obrotu i kąt θ

$$\vec r\,' = \vec r\cos\theta + (1-\cos\theta)\,\vec n\,\vec n\cdot\vec r + \sin\theta\,\vec n\times\vec r$$

obrócony wektor — dowolny wektor przed obrotem

WYPROWADZENIE NA ĆWICZENIACH

~~Przypadek gdy~~

Żeby policzyć $\vec\omega$ potrzebujemy znać jak $\vec e_i\,'$ zmieniają się w czasie

$\theta(t)$, $\vec n(t)$

używamy definicji → skomplikowane

weźmy obrócony $\vec e_i\,'$ o kąt odpowiadający $\Delta t \to \Delta\theta$ małe

$$\frac{d\vec e_i\,'}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec e_i\,'(t+\Delta t) - \vec e_i\,'(t)}{\Delta t}$$

$$\cos\Delta\theta = 1 \qquad \sin\Delta\theta = \Delta\theta$$

$\cancel{\vec e_i\,' = \vec e_i}$

$$\vec e_i\,'(t+\Delta t) = \vec e_i\,'(t) + \Delta\theta\,\vec n\times\vec e_i\,'$$

$$(\bullet)\quad \frac{d\vec e_i\,'}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec n\times\vec e_i\,' = \frac{d\theta}{dt}\vec n\times\vec e_i\,'$$

Z ogólnych rozważań wiemy, że

$$(\bullet\bullet)\quad \frac{d\vec e_i\,'}{dt} = \underbrace{\left.\frac{d\vec e_i\,'}{dt}\right|_{u'}}_{=0} + \vec\omega\times\vec e_i\,'$$

$$(\bullet)\ \&\ (\bullet\bullet) \Longrightarrow \vec\omega\times\vec e_i\,' = \frac{d\theta}{dt}\vec n\times\vec e_i\,'$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec\omega = \frac{d\theta}{dt}\vec n}$$

Wczoraj pokazaliśmy, że dla dowolnego wektora $\vec{A}$

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_U = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{U'} + \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

pochodna w układzie U (spoczywającym)

Pochodna w układzie U' w układzie poruszającym się względem układu U

Pokazaliśmy również jak transformują się prędkości

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ← prędkość w układzie U

$\vec{v}' = \left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_{U'}$ ← prędkość w układzie U'

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_0(t)$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \underbrace{\vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{prędkość unoszenia}}} \qquad \vec{v}_{tr} = \frac{d\vec{r}_0}{dt}.$$

Przedstawia prędkość względem układu U punktów spoczywających w układzie U'

↓ Teraz zobaczymy jak transformują się przyspieszenia.

Transformacja przyspieszenia

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\Big|_U = \frac{d\vec{v}'}{dt}\Big|_U + \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt}\Big|_U + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}')\Big|_U$$

$$= \frac{d\vec{v}'}{dt}\Big|_U + \frac{d\vec{v}_{tr}}{dt}\Big|_U + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)\Big|_U$$

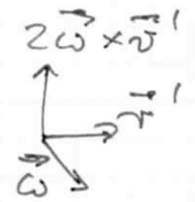
$$\frac{d\vec{v}'}{dt}\Big|_U = \frac{d\vec{v}'}{dt}\Big|_{U'} + \vec{\omega}\times\vec{v}' = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt}\Big|_U = \frac{d\vec{r}'}{dt}\Big|_{U'} + \vec{\omega}\times\vec{r}' = v' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + \omega\times\vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')}_{\vec{a}_{rot}}}$$

$2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ – przyspieszenie Coriolisa



$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}'$ – przyspieszenie punktu materialnego w układzie U' powstające wskutek tzw. przyspieszenia kątowego $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ układu U' względem U

$\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}'$ – przyspieszenie dośrodkowe
jest prostopadłe do osi obrotu i stale do niej zwrócone

$$\boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_U = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Big|_{U'}}$$