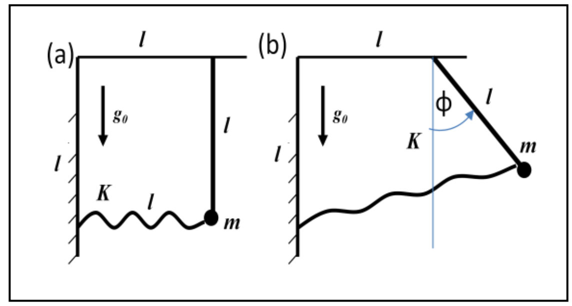
Kolokwium nr. 2 – 23 maja 2011

Mechanika i Szczególna Teoria Względności (Wykładowca - J. A. Majewski)

Zadanie 1 (8 pkt.)

Masa $\boldsymbol{m}$ została zawieszona na nieważkim, nierozciągliwym pręcie o długości $\boldsymbol{l}$ i została połączona sprężyną o stałej sprężystości $\boldsymbol{K}$ i długości swobodnej $\boldsymbol{l}$ do pionowej nieruchomej ścianki. Odległość punktu zawieszenia pręta od ścianki wynosi również $\boldsymbol{l}$ (rysunek). Cały układ umieszczony jest w jednorodnym polu grawitacyjnym o przyspieszeniu $\boldsymbol{g}$ skierowanym pionowo w dół (rysunek) i wykonuje ruch płaski w płaszczyźnie rysunku. Rysunek (a) przedstawia sytuację, gdy układ znajduje się w równowadze mechanicznej, rys. (b) przedstawia układ w trakcie drgań wahadła



a) Ile stopni swobody ma układ?

b) Wybrać współrzędną uogólnioną zgodną z więzami i podać lagranżjan układu wyrażony w wybranej współrzędnej uogólnionej oraz jej pochodnej czasowej.

Zadanie 2 (10 Pkt)

Trzy punkty materialne, każdy o masie $\boldsymbol{m}$, umieszczono w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku $\boldsymbol{a}$ i połączono nieważkimi idealnie sztywnymi prętami tworząc bryłę sztywną.

(a) Wyznacz położenie środka masy bryły.

(b) Wyznacz tensor bezwładności bryły w układzie związanym z bryłą sztywną o początku w środku masy ($\boldsymbol{I_S}$).

(c) Znajdź osie główne tensora bezwładności i odpowiadające im momenty,

Zadanie 3 (7 Pkt)

Pełna jednorodna kula oraz warstwa kulista (skorupa) o takiej samej masie $\boldsymbol{M}$ wirują wokół osi przechodzącej przez ich geometryczny środek. W obu wypadkach składowa momentu pędu wzdłuż osi obrotu jest identyczna i wynosi $\boldsymbol{L}$. Promień zewnętrzny kuli i skorupy wynosi o $\boldsymbol{R}$. Skorupa jest wypełniona jednorodnie materią w obszarze

$\boldsymbol{R}/2 \le \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{R}$.

Znajdź stosunek prędkości kątowych pełnej kuli i skorupy.

Wskazówka: $\boldsymbol{L = I\omega}$, a element objętości we współrzędnych sferycznych $\boldsymbol{dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}$**.**

Zadanie 4 (5 Pkt)

Zakreśl prawidłową odpowiedź w pytaniach (1)-(10).

(1) Na bryłę sztywną nałożono 3 więzy. Liczba stopni swobody bryły jest równa:
a) 6 b) 3 c) 0 d) 1

(2) Walec o promirniu $\boldsymbol{R}$ toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie. Prędkość środka masy walca jest równa $\boldsymbol{v}$. Prędkość punktu styczności jest równa:
a) $\boldsymbol{v}$ b) $\boldsymbol{v/R}$ c) 0 d) $\boldsymbol{-v}$

(3) Dwa jednorodne walce o równych masach $\boldsymbol{M}$ i promieniach $\boldsymbol{R}$ mają różne wysokości $\boldsymbol{h_1}$ i $\boldsymbol{h_2}$ ($\boldsymbol{h_1} > \boldsymbol{h_2}$) i odpowiednio momenty bezwladności wzdłuż osi symetrii walców $\boldsymbol{I_1}$ i $\boldsymbol{I_2}$. Między momentami bezwładności zachodzą następujące relacje:
a) $\boldsymbol{I_1} = \boldsymbol{I_2}$ b) $\boldsymbol{I_1} < \boldsymbol{I_2}$ c) $\boldsymbol{I_1} > \boldsymbol{I_2}$

(4) Równania Eulera opisują dynamikę bryły sztywnej i mają postać

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) = N_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(I_1 - I_3) = N_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_2 - I_1) = N_3$$

Gdzie I_i – momenty głowne tensora bezwłądności, ω_i składowe prędkości kątowej, N_i składowe momentu siły ($i = 1,2,3$). W tych równaniach:

a) Wszystkie wielkości wyrażone są w układzie związanym z bryłą sztywną
b) Wszystkie wielkości wyrażone są w układzie inercjalnym
c) Momenty bezwładności są w ukłądzie inercjalnym a pozostałe w układzie bryły sztywnej
d) Momenty bezwładności są w układzie bryły sztywnej a pozostałe wielkości w ukladzie inercjalnym

(5) W pewnych sytuacjach energia kinetyczna bryły sztywnej może być równa tylko energii rotacyjnej. Zachodzi to:

a) Zawsze
b) nigdy
c) Gdy początek układu związanego z bryłą sztywną jest w jej środku masy
d) Gdy początek układu związanego z bryłą sztywną ma zerową prędkość względem układu inercjalnego

(6) Policzono momenty bezwładności jednorodnego walca o promieniu R i masie M, raz względem osi symetrii walca (I_s), raz względem krawędzi bocznej (I_K). Pomiędzy momentami zachodzi następująca relacja:

a) $I_s = I_K$ b) $I_s = I_K - MR^2$ c) $I_s = I_K + MR^2$ d) $I_s = I_K - 4MR^2$

(7) Pochodna czasowa wektora $\vec{A}$ została obliczona w ukladzie inercjalnym U oraz w układzie nieinercjalnym U' obracającym się względem U z prędkością kątową $\vec{\omega}$. Związek pomiędzy pochodnymi jest następujący:

a) $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_U = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{U'}$ b) $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_U = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{U'} + \vec{\omega}\times\vec{A}$ c) $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_U = -\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{U'}$ d) $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_U = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{U'} \times\vec{\omega}$

(8) Funkcja Lagrange'a dla układu N punktów materialnych jest niezmiennicza względem przesunięć w przestrzeni. Zachowaną wielkością jest:

a) Pęd b) Moment pędu c) Energia kinetyczna d) Energia całkowita

(9) Funkcja Hamiltona dla cząstki o masie m w polu sił potencjalnych o potencjale $V(\vec{x})$ ma postać:

a) $H(\vec{x},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$ b) $H(\vec{x},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - V(\vec{x})$ c) $H(\vec{x},\vec{p}) = \vec{p}^2 + V(\vec{x})$ d) $H(\vec{x},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{m} + V(\vec{x})$

(10) Rozchodzenie się zaburzenia (fali) $\psi(x,t)$ w jednowymiarowej strunie opisane jest następującym równaniem:

a) $\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$ b) $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$

c) $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = c\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$ d) $\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$