

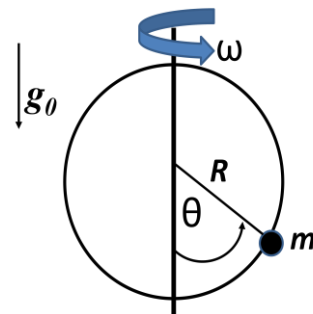
Kolokwium nr. 1 – 18 kwietnia 2011

Mechanika i Szczególna Teoria Względności (Wykładowca - J. A. Majewski)

Zadanie 1 (9 pkt.)

Przedstawiony na rysunku koralik o masie m porusza się po drucie w kształcie okręgu o promieniu R , który wiruje z prędkością kątową ω wokół swojej średnicy równoległej do natężenia jednorodnego pola grawitacyjnego $\vec{g}$.

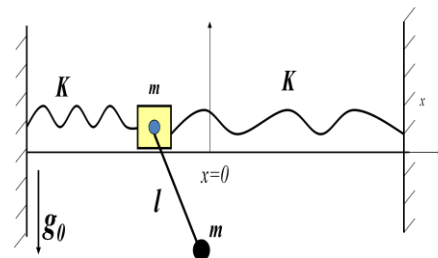
- Podać równania więzów dla danego układu. Ile stopni swobody ma układ?
- Podaj funkcję Lagrange'a dla tego układu biorąc jako współrzędną uogólnioną kąt θ zaznaczony na rysunku.
- Podaj równania ruchu dla tego układu.
- Posługując się otrzymanym równaniem ruchu podaj punkty stacjonarne układu (tzn. w tym wypadku, takie kąty θ , dla których znika przyspieszenie $\ddot{\theta}$). Przedyskutuj istnienie punktów stacjonarnych od wartości prędkości kątowej ω .
- Znajdź częstości małych drgań wokół punktu $\theta=0$ i podaj dla jakich częstości ω małe drganie wokół $\theta=0$ są możliwe.



Zadanie 2 (12 Pkt)

Przedstawiony na rysunku układ dwóch punktów materialnych o jednakowych masach m znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu $\vec{g}_0$. Ruch układu odbywa się w płaszczyźnie $y=0$. Zakładamy, że długość nienaprzężonych sprężyn jest równa połowie odległości pomiędzy ścianami.

- Podać równania więzów dla danego układu. Ile stopni swobody ma układ?
- Wybierz zgodne z więzami współrzędne uogólnione i podaj funkcję Lagrange'a dla tego układu.
- Podaj równania ruchu układu.
- Określ położenie równowagi trwałej układu.
- Wyznacz częstości małych drgań wokół położenia równowagi.



Zadanie 3 (4 Pkt)

W chwili t_0 cząstka o masie m została z prędkością początkową $\vec{v}_0$ wpuszczona do ośrodka, który wywiera na cząstkę siłę oporu proporcjonalną do pierwiastka z prędkości ($\vec{F}_R = -\alpha\sqrt{v}\frac{\vec{v}_0}{v_0}$), gdzie stała $\alpha > 0$. W ośrodku cząstka porusza się dalej w kierunku $\vec{v}_0$ i nie działa na nią żadna inna siła oprócz siły oporu ośrodka. Po jakim czasie t cząstka zatrzyma się?

Zadanie 4 (5 Pkt)

Zakreśl prawidłową odpowiedź w pytaniach (1)-(10).

- (1) Cząstka porusza się po powierzchni w przestrzeni $\mathcal{R}^3$ zadanej równaniem $f(x,y,z) = 0$. Siła reakcji więzów jest:

a) Styczna do płaszczyzny b) równa $-\lambda(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ c) równa 0 d) równa $-\lambda(0,0,\frac{\partial f}{\partial z})$.

- (2) Cząstka porusza się w przestrzeni $\mathcal{R}^3$ po krzywej zdefiniowanej przez przecięcie się dwóch płaszczyzn $f_1(x,y,z) = 0$ oraz $f_2(x,y,z) = 0$. Liczba stopni swobody tego układu mechanicznego wynosi:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

- (3) Cząstka porusza się w przestrzeni $\mathcal{R}^3$ po krzywej zdefiniowanej przez przecięcie się dwóch płaszczyzn $f_1(x,y,z)=0$ oraz $f_2(x,y,z)=0$. Siła reakcji więzów jest równa:
- a) $\vec{F}_R = -\lambda_1 \nabla_{\vec{r}} f_1(\vec{r}) - \lambda_2 \nabla_{\vec{r}} f_2(\vec{r})$ b) $\vec{F}_R = -\lambda_1 \nabla_{\vec{r}} f_1(\vec{r})$
c) $\vec{F}_R = -\lambda_2 \nabla_{\vec{r}} f_2(\vec{r})$ d) $\vec{F}_R = -\lambda \nabla_{\vec{r}} (f_1(\vec{r}) + f_2(\vec{r}))$
- (4) Funkcja Lagrange'a dla układu N punktów materialnych jest niezmiennicza względem obrotów. Zachowaną wielkością jest:
- a) Pęd b) Moment pędu c) Energia kinetyczna d) Energia całkowita
- (5) Układ punktów materialnych z więzami holonomicznymi opisany jest przez funkcję Lagrange'a f współrzędnych uogólnionych i odpowiadających im prędkości $L(q_1, q_2, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_f, t)$. Pęd uogólniony związany ze zmienną q_i to:
- a) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ b) $m \dot{q}_i$ c) $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ d) $\frac{m}{2} q_i^2$
- (6) Zmienna q_k jest wielkością cykliczną, czyli nie występuje w lagranżjanie. Wielkością zachowywaną jest:
- a) Pęd uogólniony związany ze zmienną q_k b) energia kinetyczna układu
c) Zmienna q_k d) całkowity moment pędu układu
- (7) W układzie N punktów materialnych o masach m_i i położeniach w układzie inercyjnym $\vec{r}_{ii}$ na każdy punkt działa siła zewnętrzna i siły wewnętrzne pochodzące od innych punktów $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}$. Środek masy układu jest definiowany jako wektor $\vec{r}_s = (\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_{ii}) / (\sum_{i=1}^N m_i)$. Siły wewnętrzne spełniają III zasadę dynamiki Newtona (*actio = reactio*). Przyspieszenie środka masy określone jest:
- a) Tylko przez sumę sił zewnętrznych b) nie zależy od sił i jest równe zero
c) Nie zależy od sił i jest stałe d) Tylko przez sumę sił wewnętrznych
- (8) Problem dwóch ciał w potencjale $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, gdzie $\alpha > 0$ i r odległość pomiędzy ciałami. Jeżeli Energia układu jest mniejsza od zera ($E < 0$) to tor ruchu jest:
- a) parabolą b) hiperbolą c) prostą d) elipsą
- (9) Pochodna czasowa wektora $\vec{A}$ została obliczona w układzie inercyjnym U oraz w układzie nieinercyjnym U' obracającym się względem U z prędkością kątową $\vec{\omega}$. Związek pomiędzy pochodnymi jest następujący:
- a) $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_U = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{U'}$ b) $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_U = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{U'} + \vec{\omega} \times \vec{A}$ c) $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_U = -\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{U'}$ d) $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_U = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{U'} \times \vec{\omega}$
- (10) W danej chwili układ obraca się wokół osi $\vec{n}$ o kąt $\theta(t)$. Wektor chwilowej prędkości kątowej jest równy:
- a) $\vec{\omega} = 0$ b) $\vec{\omega} = \theta(t) \vec{n}$ c) $\vec{\omega} = \vec{n}$ d) $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{n}$