

Rozwiązania zadań egzaminacyjnych z Mechaniki i Szczególnej Teorii Względności

Zadanie 1 (7 pkt)

Cząstka o masie m i prędkości $\vec{v}_0$ skierowanej horyzontalnie wpada przez boczną ściankę do naczynia z cieczą, w której, oprócz siły ciężkości $m\vec{g}$, działa na nią także siła oporu $\vec{F} = -\kappa\vec{v}$.

- Znaleźć położenie punktu (tj. jego współrzędne w wybranym układzie odniesienia), w którym cząstka trafi w przeciwną ściankę naczynia.
- Przedyskutować wynik w zależności od odległości d między ściankami naczynia i wartości $v_0 \equiv |\vec{v}_0|$ prędkości początkowej.
- Zbadać granicę $\kappa \rightarrow 0$.

Wskazówka: Przyjąć dla uproszczenia, że punkt w którym cząstka wpada do naczynia znajduje się nieskończenie wysoko nad jego dnem.

Rozwiązanie

Przyjmijmy układ odniesienia, którego oś x pokrywa się z kierunkiem początkowej prędkości $\vec{v}_0$ cząstki, a oś y skierowana jest do góry (tzn. pole ciężkości $\vec{g} = -g\vec{e}_y$). Po wпадnięciu do naczynia zależność składowych v_x i v_y prędkości cząstki od czasu zadają równania Newtona

$$\begin{aligned}m \frac{dv_x}{dt} &= -\kappa v_x \\m \frac{dv_y}{dt} &= -mg - \kappa v_y.\end{aligned}$$

Scałkowanie daje

$$\begin{aligned}v_x(t) &= v_0 e^{-\frac{\kappa}{m}t}, \\v_y(t) &= -\frac{mg}{\kappa}(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}).\end{aligned}$$

Stąd, całkując jeszcze raz znajdujemy

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \int_0^t dt' e^{-\frac{\kappa}{m}t'} = v_0 \frac{m}{\kappa}(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}) \\y(t) &= -\frac{mg}{\kappa} \int_0^t dt' (1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t'}) = -\frac{mg}{\kappa} \left[t + \frac{m}{\kappa}(e^{-\frac{\kappa}{m}t} - 1) \right].\end{aligned}$$

Założyliśmy tu, że cząstka wpada do naczynia w punkcie o współrzędnych $(x = 0, y = 0)$. Oczywiście rozwijając $y(t)$ dla $t \sim 0$ znajdziemy, że $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dots$. Uderzenie cząstki w przeciwną ściankę zachodzi, gdy $x(t) = d$. Musi zatem wtedy być

$$1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t} = \frac{\kappa d}{v_0 m},$$

czyli, zachodzi to dla

$$t_k = -\frac{m}{\kappa} \ln \left(1 - \frac{\kappa d}{v_0 m} \right).$$

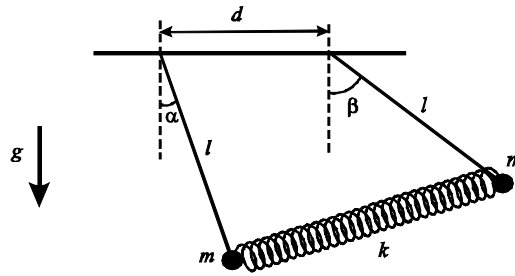
Jak łatwo zauważyć, wyrażenie pod logarytmem może być ujemne, co oznacza, że cząstka nie doleci nigdy do przeciwną ścianki. Spowodowane jest to tym, że przy ustalonej wartości v_0 zasięg cząstki jest skończony (nawet przy nieskończonym czasie lotu). Jeśli odległość ścianek d od siebie jest mniejsza niż ten zasięg (który dla danej wartości v_0 wynosi $v_0 m / \kappa$), to mamy stąd czas lotu t_k i jako współrzędne punktu uderzenia cząstki w przeciwną ściankę mamy $x(t_k) = d$ oraz

$$y(t_k) = -\frac{m^2 g}{\kappa^2} \left[-\ln \left(1 - \frac{\kappa d}{v_0 m} \right) - \frac{\kappa d}{v_0 m} \right].$$

Oczywiście dla $\kappa \rightarrow 0$ dostajemy $t_k = d/v_0$ i $y(t_k) = -\frac{1}{2}gt_k^2 = -\frac{1}{2}g(d/v_0)^2$, tak jak dla spadku swobodnego w polu siły ciężkości.

Zadanie 2 (8 pkt).

Dwie masy m zostały zawieszone na nieważkich prętach o długości l , których punkty zaczepienia znajdują się na tej samej wysokości w odległości d od siebie. Masy połączone są sprężyną o stałej sprężystości k i długości swobodnej d (takiej samej, jak odległość punktów zawieszenia wahadeł). Cały układ umieszczony jest w polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g skierowanym pionowo w dół (rysunek).



- Wyrazić położenia mas w inercyjnym kartezjańskim układzie współrzędnych poprzez kąty α i β , czyli kąty o jakie masy są odchylone od pionu.
- Zapisać kartezjańskie składowe prędkości obu mas za pomocą kątów α i β oraz ich pochodnych po czasie.
- Podać lagranżjan układu wyrażony we współrzędnych uogólnionych α i β (czyli wyrażony przez $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$).

Rozwiązanie

Wybierzmy początek układu inercyjnego w punkcie zaczepienia pierwszego pręta z osią x skierowaną w dół (tzn. zgodnie z $\vec{g}$).

- Współrzędne masy 1: $x_1 = l \cos \alpha$; $y_1 = l \sin \alpha$

$$\text{masy 2: } x_2 = l \cos \beta; \quad y_2 = d + l \sin \beta$$

- Składowe prędkości masy 1 i 2: $\dot{x}_1 = -l\dot{\alpha} \sin \alpha$; $\dot{y}_1 = l\dot{\alpha} \cos \alpha$
 $\dot{x}_2 = -l\dot{\beta} \sin \beta$; $\dot{y}_2 = l\dot{\beta} \cos \beta$

- $L = T - V$, gdzie T - energia kinetyczna a V energia potencjalna

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m}{2} l^2 [\dot{\alpha}^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \dot{\beta}^2 (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)] = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)$$

$$V = V_{\text{grav}} + V_{\text{elast}}$$

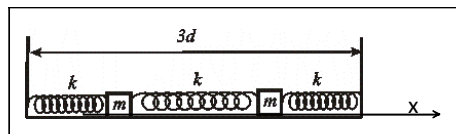
$$V_{\text{grav}} = -mgx_1 - mgx_2 = -mgl(\cos \alpha + \cos \beta)$$

$$V_{\text{elast}} = \frac{k}{2} (D - d)^2, \text{ gdzie } D \text{ jest długością odkształconej sprężyny równą odległości pomiędzy masami}$$

$$\begin{aligned} D^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2 (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + [l(\sin \alpha - \sin \beta) - d]^2 = \\ &= l^2 [(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2] - 2ld(\sin \alpha - \sin \beta) + d^2 = \\ &= 2l^2 (1 - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) - 2ld(\sin \alpha - \sin \beta) + d^2. \end{aligned}$$

Zadanie 3 (8 pkt.)

Dwie masy m wykonują drgania w kierunku poziomym.



Każda z mas jest zaczepiona za pomocą dwóch identycznych sprężyn do nieruchomej ścianki i do drugiej masy (patrz rysunek). Sprężyny mają identyczne stałe sprężystości k i długości swobodne d . Całkowita odległość między ściankami wynosi $3d$. Lagranżjan dla tego układu sprzężonych oscylatorów w zmiennych q_1 i q_2 , będących wychyleniami mas z położenia równowagi, ma następującą postać:

$$L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - k(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2).$$

- Dla jakich wartości położenia mas w kierunku poziomym (x_1 i x_2) układ jest w stanie równowagi trwałej?
- Znaleźć częstotliwości i wektory własne układu.
- Podać jakim drganiom odpowiadają mody własne układu.

Rozwiązanie

$$L(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - k(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2)$$

- Energia potencjalna $V(q_1, q_2) = k(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2)$ ma minimum dla $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, co odpowiada położeniom równowagi mas 1 i 2, odpowiednio $x_{10} = d$, i $x_{20} = x_{10} + d = 2d$

b) Równania ruchu - równania Lagrange'a II rodzaju:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \text{ dla } i=1,2$$

$$m\ddot{q}_1 + 2kq_1 - kq_2 = 0$$

$$m\ddot{q}_2 + 2kq_2 - kq_1 = 0$$

W celu znalezienia drgań własnych robimy założenie dotyczące zależności od czasu q_i , $q_i(t) = A_i C \cos(\omega t - \delta)$, co prowadzi do układu dwóch równań jednorodnych na A_i

$$-m\omega^2 A_1 + 2kA_1 - kA_2 = 0$$

$$-m\omega^2 A_2 + 2kA_2 - kA_1 = 0$$

które można zapisać w formie macierzowej

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Warunkiem istnienia rozwiązań jest znikanie wyznacznika macierzy,

$$(-m\omega^2 + 2k)^2 - k^2 = 0$$

$$m^2\omega^4 - 4mk\omega^2 + 3k^2 = 0,$$

co daje dwa różne rozwiązania dla ω^2 , $\omega_1^2 = \omega_{(+)}^2 = 3k/m$ oraz $\omega_2^2 = \omega_{(-)}^2 = k/m = \omega_0^2$, gdzie ω_0 jest częstością drgań własnych jednego oscylatora. Wstawiając znalezione kwadraty częstości własnych do równania sekularnego znajduje odpowiadające im wektory własne.

Dla $\omega_{(+)}^2$ otrzymujemy $-kA_1^{(+)} - kA_2^{(+)} = 0$, czyli $A_2^{(+)} = -A_1^{(+)}$. Bez straty ogólności można przyjąć $A_1^{(+)} = 1, A_2^{(+)} = -1$.

Dla $\omega_{(-)}^2$ otrzymujemy $kA_1^{(-)} - kA_2^{(-)} = 0$, czyli $A_2^{(-)} = A_1^{(-)}$, gdzie również można przyjąć $A_2^{(+)} = A_1^{(+)} = 1$.

c) Dla częstości $\omega_{(+)}^2 = 3k/m$ drgania tego modu mają postać

$q_1^{(+)} = C_+ \cos(\omega_{(+)}t - \delta_+)$ oraz $q_2^{(+)} = -C_+ \cos(\omega_{(+)}t - \delta_+)$, czyli masy 1 i 2 drgają w przeciwfazie.

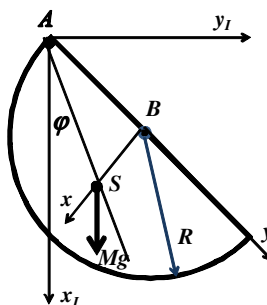
Dla częstości $\omega_{(-)}^2 = k/m$ drgania tego modu mają postać

$q_1^{(-)} = C_- \cos(\omega_{(-)}t - \delta_-)$ oraz $q_2^{(-)} = C_- \cos(\omega_{(-)}t - \delta_-)$, czyli masy 1 i 2 drgają w fazie.

Zadanie 4 (13 pkt)

Bryła sztywna w kształcie jednorodnego półdysku o masie M i promieniu R , zawieszona w punkcie A pokazanym na rysunku (a), może obracać się swobodnie w pionowej płaszczyźnie wokół osi przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do płaszczyzny płyty, tworząc płaskie wahadło fizyczne. Jednorodne pole grawitacyjne o natężeniu $\vec{g}$ jest skierowane pionowo w dół.

Ruch wahadła można opisać biorąc za zmienną uogólnioną kąt φ pomiędzy prostą równoległą do $\vec{g}$ i przechodzącą przez punkt zaczepienia wahadła A oraz prostą przechodzącą przez punkt A i środek ciężkości półdysku S (rysunek).



a) Znaleźć położenie środka ciężkości półdysku (w układzie związanym z bryłą sztywną) $\vec{R}_S := \frac{1}{M} \int \vec{r} d\sigma$

gdzie ρ jest gęstością powierzchniową półdysku, $d\sigma$ elementem powierzchni, a $\vec{r}$ wektorem leżącym w płaszczyźnie półdysku [$\vec{r} = (x, y, 0)$].

b) Znaleźć moment bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt B będący środkiem średnicy półdysku i prostopadłej do jego płaszczyzny, $I_{zz}^{(B)} = \int \rho r^2 d\sigma$, gdzie jak poprzednio $\vec{r} = (x, y, 0)$.

Wskazówka: Całkowania w punktach a) i b) najwygodniej jest przeprowadzić we współrzędnych biegunowych.

c) Korzystając z twierdzenia Steinera $I = I^{(S)} + Md^2$, które wyraża moment bezwładności I względem ustalonej osi przez moment bezwładności $I^{(S)}$ względem równoległej osi przechodzącej przez środek masy i wzajemną odległości osi d , znaleźć moment bezwładności $I_{zz}^{(A)}$ względem osi obrotu półdysku przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do płaszczyzny półdysku.

d) Znaleźć lagranżjan dla opisanego powyżej wahadła fizycznego.

e) Dla jakiej wartości zmiennej uogólnionej układ jest w równowadze?

f) Znaleźć częstość małych drgań wahadła wokół położenia równowagi.

Rozwiązanie

a) Do całkowania wprowadzimy biegunowy układ współrzędnych (r, φ) gdzie $x = r \cos \varphi$, oraz $d = r \sin \varphi$. W nowych zmiennych $d\sigma = dx dy = r dr d\varphi$. Powierzchniowa gęstość masy półkrażka $\rho = M/(\frac{1}{2}\pi R^2) = 2M/\pi R^2$.

$$X_S = \frac{2}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr r^2 \cos \varphi = \frac{4}{3\pi} R < R$$

$$Y_S = \frac{2}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr r^2 \sin \varphi = 0$$

b)

$$I_{zz}^{(B)} = \frac{2M}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^R dr r^3 = \frac{2M}{\pi R^2} \pi \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

c) Oznaczmy odległość pomiędzy punktami A i S przez d , gdzie $d^2 = R^2 + X_S^2 = R^2 \left(1 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right)$, czyli $d = R \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2}$.

Do dalszych obliczeń potrzebujemy $I_{zz}^{(A)} = I^{(S)} + Md^2 = I^{(S)} + MX_S^2 + MR^2 = I_{zz}^{(B)} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$.

d) $L = T - V$, gdzie T jest energią kinetyczną ruchu obrotowego wokół osi przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do powierzchni półkrażka, a V jest jego energią grawitacyjną. Układ inercjalny wybieramy tak, jak na rysunku i za zmienną uogólnioną bierzemy kąt φ .

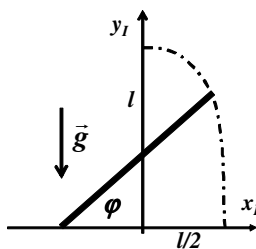
$$T = \frac{1}{2} I_{zz}^{(A)} \dot{\varphi}^2; \quad V = -Mgx_{Is} = -Mgd \cos \varphi \text{ i dalej lagranżjan } L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} I_{zz}^{(A)} \dot{\varphi}^2 + Mgd \cos \varphi.$$

e) Z warunku $\frac{dV}{d\varphi} = 0$ wynika, że minimum energii jest dla $\varphi_0 = 0$, czyli dla tej wartości kąta φ układ jest w równowadze.

f) Otrzymujemy następujące równanie ruchu $I_{zz}^{(A)} \ddot{\varphi} + Mgd \sin \varphi = 0$. Rozwijając $\sin \varphi$ wokół zera mamy $\sin \varphi \cong \varphi$, i równanie ruchu przybiera postać $\ddot{\varphi} = -\frac{Mgd}{I_{zz}^{(A)}} \varphi$. Częstość małych drgań jest więc równa $\omega^2 = \frac{Mgd}{I_{zz}^{(A)}} = \frac{g}{R} \frac{2}{3} \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2}$.

Zadanie 5 (10 pkt)

Początkowo pionowo stojący pręt o masie m i długości l został puszczonej z tego położenia w kierunku poziomej płaszczyzny po której porusza się bez tarcia jeden koniec pręta. Pręt porusza się w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g i skierowanym pionowo w dół. Ruch pręta można opisać biorąc za zmienną uogólnioną kąt φ pomiędzy płaszczyzną poziomą a osią pręta (patrz rys.)



a) Pokazać, że wolny (tzn. bez kontaktu z płaszczyzną) koniec pręta porusza się po ćwiartce elipsy o półosiach $l/2$ i l .

Wskazówka: rozważyć najpierw ruch środka masy w kierunku poziomym. Jaka siła działa na środek masy w kierunku poziomym? Równanie elipsy ma postać $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

b) Wyrazić energię całkowitą pręta przez kąt φ i jego pochodną czasową $\dot{\varphi}$, $E(\varphi, \dot{\varphi})$.

c) Posługując się zasadą zachowania energii oraz faktem, że w chwili $t = 0$, $\varphi(0) = \pi/2$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, znaleźć prędkość kątową pręta w chwili uderzenia jego wolnego końca o płaszczyznę (tzn. w chwili gdy kąt $\varphi = 0$).

Wskazówka: moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez środek masy pręta i prostopadłej do pręta wynosi $I_S = ml^2/12$.

Rozwiązanie

a) W kierunku poziomym nie działają na środek masy żadne siły, $\ddot{x}_s = 0$, i z warunków początkowych $x_s = 0$ w trakcie całego ruchu pręta. Współrzędne wolnego końca pręta są równe: $x = \frac{l}{2} \cos \varphi$ i $y = l \sin \varphi$. Mamy więc

$$\frac{x^2}{(l/2)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1.$$

Koniec pręta porusza się więc po ćwiartce elipsy (φ zmienia się od $\pi/2$ do 0) o półosiach $l/2$ i l .

b) Energia kinetyczna pręta jest równa energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy oraz energii kinetycznej obrotu pręta wokół środka masy - $T = \frac{m}{2} \dot{y}_s^2 + \frac{1}{2} I_{(S)} \dot{\phi}^2$.

$$y_s = \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad \dot{y}_s = \frac{l}{2} \dot{\phi} \cos \varphi, \quad \text{więc } T = \frac{ml^2}{8} \dot{\phi}^2 (\cos^2 \varphi + 1/3).$$

Energia potencjalna pręta jest jego energią grawitacyjną $V = mgy_s = mg \frac{l}{2} \sin \varphi$.

$$\text{Energia całkowita } E(\varphi, \dot{\phi}) = T + V = \frac{ml^2}{8} \dot{\phi}^2 (\cos^2 \varphi + 1/3) + mg \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

W chwili gdy $\varphi = \pi/2$, to $\dot{\phi} = 0$ (pręt stoi prostopadłe do powierzchni) i jego energia jest równa $E(\pi/2, 0) = mg \frac{l}{2}$.

Kiedy koniec pręta osiągnie powierzchnię poziomą mamy $\varphi = 0$ i prędkość kątową (której właśnie szukamy) $\dot{\phi}$.

Energia całkowita jest wtedy równa $E(0, \dot{\phi}) = \frac{ml^2}{6} \dot{\phi}^2$. Ponieważ energia jest zachowana mamy $E(0, \dot{\phi}) = E(\pi/2, 0)$ i stąd $\frac{ml^2}{6} \dot{\phi}^2 = mg \frac{l}{2}$. Ostatecznie szukana prędkość kąтова $\dot{\phi} = \sqrt{\frac{3g}{l}}$.