

# *ELEKTRODYNAMIKA R*

**J. Kamiński**



# 1 Seria I

Współrzędne  $(u, v, w)$  nazywamy ortogonalnymi współrzędnymi krzywoliniowymi jeśli kwadrat infinytezymalnej odległości  $ds^2$  przyjmuje postać

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = h_u^2 du^2 + h_v^2 dv^2 + h_w^2 dw^2,$$

gdzie  $h_u, h_v, h_w$  są funkcjami współrzędnych  $(u, v, w)$  i noszą nazwę czynników skalujących lub Lamè. We współrzędnych ortogonalnych operacje gradientu, dywergencji, rotacji i laplasjan przyjmują postaci:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{h_u} \frac{\partial\Phi}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial\Phi}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial\Phi}{\partial w} \mathbf{e}_w, \\ \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w A_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w A_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v A_w) \right], \\ \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u A_u & h_v A_v & h_w A_w \end{vmatrix}, \\ \Delta\Phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial\Phi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial\Phi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial\Phi}{\partial w} \right) \right], \end{aligned}$$

gdzie pole wektorowe  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_u(\mathbf{r})\mathbf{e}_u + A_v(\mathbf{r})\mathbf{e}_v + A_w(\mathbf{r})\mathbf{e}_w$ , a układ trzech wersorów  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$  tworzy układ prawoskrętny, tj.  $\mathbf{e}_w = \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v$ .

**ZADANIE 1.1** \_\_\_\_\_   
Wyznaczyć dywergencję i laplasjan we współrzędnych kulistych. Wyrazić wersory  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  i  $\mathbf{e}_\phi$  poprzez wersory współrzędnych kartezjańskich  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  i  $\mathbf{e}_z$ .

**ZADANIE 1.2** \_\_\_\_\_   
Wyznaczyć gradient i laplasjan we współrzędnych walcowych. Wyrazić wersory  $\mathbf{e}_s$  i  $\mathbf{e}_\phi$  poprzez wersory współrzędnych kartezjańskich  $\mathbf{e}_x$  i  $\mathbf{e}_y$ .

**ZADANIE 1.3** \_\_\_\_\_   
Obliczyć

$$\nabla(\mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)), \quad \nabla \cdot (\varphi(r)\mathbf{A}(r)), \quad \nabla \times (\varphi(r)\mathbf{A}(r)),$$

gdzie pole skalarne  $\varphi(r)$  i pola wektorowe  $\mathbf{A}(r)$  i  $\mathbf{B}(r)$  zależą jedynie od długości wektora wodzącego  $\mathbf{r}$ . Zapisać wynik w postaci wektorowej, w której występują pochodne pól po długości wektora wodzącego.

**Rada:** posłużyć się notacją wskaźnikową pamiętając, że  $r_{,i} = x_i/r$ .

**ZADANIE 1.4** \_\_\_\_\_   
Zapisać w postaci wektorowej

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{irs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{stp}a_k a_r b_m c_t \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{nrs}\varepsilon_{lmp}\varepsilon_{stp}a_r a'_k b_n b'_i c_t c'_m.$$

**Rada:** zredukować epsilony gdzie tylko można.

**ZADANIE 1.5** \_\_\_\_\_ ○  
 Zdefiniujmy operator  $\hat{\mathbf{L}}$  (z dokładnością do czynnika  $\hbar$  jest to operator orbitalnego momentu pędu)

$$\hat{\mathbf{L}} = -i\mathbf{r} \times \nabla.$$

Wykazać następujące tożsamości:

$$\begin{aligned} (A) : \quad \nabla \times \hat{\mathbf{L}} &= -i\mathbf{r} \nabla^2 + i\nabla(1 + \mathbf{r} \cdot \nabla), \\ (B) : \quad \nabla \times \hat{\mathbf{L}} &= \frac{1}{r}(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{L}}) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right) + i \frac{\mathbf{r}}{r^2} \hat{\mathbf{L}}^2. \end{aligned}$$

**ZADANIE 1.6** \_\_\_\_\_ ○  
 Przy spełnionych znanych założeniach twierdzenie Gaussa mówi, że

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{F} = \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}.$$

Wykazać, że wynikają z niego następujące związki:

$$\begin{aligned} (A) : \quad \int_V d^3r \nabla \psi &= \int_{\partial V} d\mathbf{S} \psi, \\ (B) : \quad \int_V d^3r \nabla \times \mathbf{A} &= \int_{\partial V} d\mathbf{S} \times \mathbf{A}. \end{aligned}$$

**ZADANIE 1.7** \_\_\_\_\_ ○  
 Wykazać, że z twierdzenia Gaussa wynikają tożsamości Greena,

$$\begin{aligned} (A) : \quad \int_V d^3r [\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi] &= \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \phi \nabla \psi, \\ (B) : \quad \int_V d^3r [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] &= \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot [\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi]. \end{aligned}$$

oraz ich wektorowe odpowiedniki,

$$\begin{aligned} (A') : \quad \int_V d^3r [(\nabla \times \mathbf{P}) \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q})] &= \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot [\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q}], \\ (B') : \quad \int_V d^3r [\mathbf{Q} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{P}) - \mathbf{P} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{Q})] &= \int_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot [\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P}]. \end{aligned}$$

**ZADANIE 1.8** \_\_\_\_\_ ○  
 Przy pewnych znanych założeniach twierdzenie Stokesa mówi, że

$$\int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{F} = \int_{\partial S} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}.$$

Wykazać, że wynikają z niego następujące związki:

$$(A) : \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \psi = \int_{\partial S} d\mathbf{r} \psi,$$

$$(B) : \int_S [dS_k \nabla A_k - d\mathbf{S} (\nabla \cdot \mathbf{A})] = \int_{\partial S} d\mathbf{r} \times \mathbf{A}.$$

**ZADANIE 1.9** \_\_\_\_\_ ○

Wykazać, tożsamości:

$$(A) : \int d^3r \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} = 0, \text{ gdy } \mathbf{F} = \nabla \phi, \nabla \cdot \mathbf{G} = 0,$$

$$(B) : \int d^3r \mathbf{G} \times \mathbf{F} = 0, \text{ gdy } \mathbf{F} = \nabla \phi, \nabla \times \mathbf{G} = 0.$$

**ZADANIE 1.10** \_\_\_\_\_ ○

Wykazać, tożsamość

$$\int_V d^3r \mathbf{P} = - \int_V d^3r \mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{P}) + \int_{\partial V} (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{r}.$$

**ZADANIE 1.11** \_\_\_\_\_ ○

**Twierdzenie Helmholtza:**

Wykazać, że znikające w nieskończoności dowolne pole wektorowe  $\mathbf{C}(\mathbf{r})$  (w ogólności może ono być również funkcją czasu) można rozbić jednoznacznie na sumę dwóch pól wektorowych,

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \mathbf{C}_\perp(\mathbf{r}) + \mathbf{C}_\parallel(\mathbf{r}),$$

takich, że

$$\nabla \cdot \mathbf{C}_\perp(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{C}_\parallel(\mathbf{r}) = 0.$$

Wykazać, że

$$\mathbf{C}_\perp(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{C}_\parallel(\mathbf{r}) = -\nabla \Omega(\mathbf{r}),$$

gdzie

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \times \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

oraz

$$\Omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Można skorzystać np. z równości

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$$

oraz tożsamości wektorowej  $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ . A przy wykazaniu jednoznaczności rozkładu można posłużyć się tożsamościami Greena.

**ZADANIE 1.12****Twierdzenie Helmholtza w skończonej objętości:**

Wykazać, że wzór Helmholtza w skończonej objętości przyjmuje postać

$$-4\pi\mathbf{C}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \int_V d^3r' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla \times \int_V d^3r' \frac{\nabla' \times \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{\partial V} \left[ d\mathbf{S}' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{(d\mathbf{S}' \cdot \nabla')\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{d\mathbf{S}' \times (\nabla' \times \mathbf{C}(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{(d\mathbf{S}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right].$$

Wynika z niego, że jeśli w objętości  $V$  znikają  $\nabla \cdot \mathbf{C}(\mathbf{r})$  i  $\nabla \times \mathbf{C}(\mathbf{r})$ , to pole  $\mathbf{C}(\mathbf{r})$  jest jednoznacznie wyznaczone przez jego wartość i pochodne przestrzenne na brzegu  $\partial V$ .

**ZADANIE 1.13****Twierdzenie Helmholtza dla funkcji skalarnej w skończonej objętości:**

Wykazać odpowiednik wzoru Helmholtza postaci

$$-4\pi\phi(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \int_V d^3r' \frac{\nabla' \phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{\partial V} d\mathbf{S}' \frac{\phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Na wykładzie pokazałem, że funkcje pola  $\psi_A(x)$  spełniają równania Eulera-Lagrange'a

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\mu}(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A(x)},$$

oraz, że dla układu o symetrii translacyjnej zachowany jest tensor energii-pędu

$$T^\mu{}_\nu(x) = \psi_{A,\nu}(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\mu}(x)} - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu.$$

Jeśli funkcje pola  $\psi_A(x)$  są zespolone i Lagranżjan jest niezmienniczy względem globalnej transformacji cechowania  $\psi'_A(x) = e^{iq\lambda} \psi_A(x)$ ,  $q$ ,  $\lambda$  rzeczywiste, wówczas zachowującym się prądem jest czterowektor

$$j^\mu(x) = iq \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\mu}(x)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,\mu}^*(x)} \right).$$

W notacji czasowo-przestrzennej, gdy

$$\dot{\psi}_A(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \psi_A(\mathbf{r}, t), \quad \psi_{A,i}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial x^i} \psi_A(\mathbf{r}, t),$$

równania te (a w zasadzie niektóre z nich) przyjmują odpowiednio postaci

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_A(\mathbf{r}, t)} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,i}(\mathbf{r}, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A(\mathbf{r}, t)},$$

$$T^0_0(\mathbf{r}, t) = \dot{\psi}_A(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_A(\mathbf{r}, t)} - \mathcal{L}.$$

Ponadto gęstość ładunku  $\rho(\mathbf{r}, t)$  i gęstość prądu  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  wynoszą

$$\rho(\mathbf{r}, t) = iq \left( \psi_A(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_A(\mathbf{r}, t)} - \dot{\psi}_A^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A^*(\mathbf{r}, t)} \right)$$

$$j^i(\mathbf{r}, t) = iq \left( \psi_A(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A,i}(\mathbf{r}, t)} - \dot{\psi}_A^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{A,i}^*(\mathbf{r}, t)} \right)$$

i spełniają zasadę zachowania

$$\partial_t \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

**ZADANIE 1.14** \_\_\_\_\_ ○

Wykazać, że zespolone pole  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , którego dynamika opisana jest funkcją Lagrange'a,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i \hbar (\dot{\psi}^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) - \dot{\psi}(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t)) - \frac{\hbar^2}{2m} \psi_{,i}(\mathbf{r}, t) \psi_{,i}^*(\mathbf{r}, t) - V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t),$$

spełnia równanie Schrödingera i wyznaczyć  $T_0^0(\mathbf{r}, t)$ . Jak należy powiązać  $q$  z ładunkiem elektronu  $e$ , aby  $\rho(\mathbf{r}, t)$  było gęstością ładunku? Czy spełniona jest zasada zachowania ładunku elektrycznego?

**ZADANIE 1.15** \_\_\_\_\_ ○

Dla pola wektorowego  $B_\mu(x)$  spełniającego warunek Lorentza  $\partial_\mu B^\mu(x) = 0$  zdefiniujemy wielkość

$$H_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x).$$

Wykazać, że trzy Lagranżjany

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu},$$

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu B^\mu)^2,$$

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{2} (\partial_\mu B_\nu) (\partial^\mu B^\nu),$$

prowadzą do tego samego równania Eulera-Lagrange'a. Wykazać, że każda para różni się od siebie o cztero-dywergencję, czyli o wielkość typu  $\partial_\mu C^\mu$ . Podać jawną postać  $C_\mu$  dla każdej z par (oczywiście, wystarczy to zrobić dla dwóch par, np. (3,1) i (3,2)).

## 2 Seria II

Wzór całkowy na wektor natężenia pola elektrycznego generowanego przez rozkład ładunków ma postać

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau' && \text{rozkład objętościowy ładunku } \rho(\mathbf{r}') \text{ o wymiarze } C/m^3 \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} da' && \text{rozkład powierzchniowy ładunku } \sigma(\mathbf{r}') \text{ o wymiarze } C/m^2 \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl' && \text{rozkład liniowy ładunku } \lambda(\mathbf{r}') \text{ o wymiarze } C/m. \end{aligned}$$

W powyższym wzorze  $d\tau' = dx' dy' dz'$ . Jeżeli powierzchnię  $S$  parametryzujemy zmiennymi  $u$  i  $v$  tak, że dowolny punkt powierzchni określony jest wektorem wodzącym  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'(u, v)$ , to

$$da' = \left| \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial v} \right| du dv.$$

Analogicznie, jeśli wektor wodzący  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'(u)$  parametryzuje krzywą  $C$ , to

$$dl' = \left| \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial u} \right| du.$$

### ZADANIE 2.1 \_\_\_\_\_ ○

Na okręgu o promieniu  $R$  rozmieszczony jest ładunek o liniowym rozkładzie  $\lambda(\mathbf{r}')$ . Jeśli okrąg ten umieścimy na płaszczyźnie  $(xy)$ , tak aby jego środek znajdował się w początku układu współrzędnych, to

$$\lambda(\mathbf{r}') = \lambda_0 + \lambda_1 \cos\left(\arctg\left(\frac{y'}{x'}\right)\right),$$

gdzie  $\lambda_0$  i  $\lambda_1$  są stałymi. Jaką postać ma rozkład ładunku jeśli okrąg sparametryzujemy kątem biegunowym  $\phi'$ ? Wyznaczyć pole elektryczne  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  na osi  $z$ .

### ZADANIE 2.2 \_\_\_\_\_ ○

Nieskończona płaska płyta jest naładowana ładunkiem o stałej gęstości powierzchniowej  $\sigma$ . W płycie znajduje się okrągły otwór o promieniu  $R$ . Znaleźć natężenie pola elektrycznego na osi otworu.

### ZADANIE 2.3 \_\_\_\_\_ ○

Znaleźć natężenie pola elektrycznego dla:

- kuli o promieniu  $R$  naładowanej ładunkiem o gęstości objętościowej  $\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{R}{r}}$  (współrzędne kuliste),
- walca o promieniu  $R$  naładowanego ładunkiem o gęstości objętościowej  $\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{R}{s}}$  (współrzędne walcowe).

Skorzystać z symetrii układu i prawa Gaussa.

---

**ZADANIE 2.4** \_\_\_\_\_ ○  
Metodą separacji współrzędnych kartezjańskich wyznaczyć potencjał wytworzony przez ładunek rozłożony w nieskończonym ośrodku z gęstością

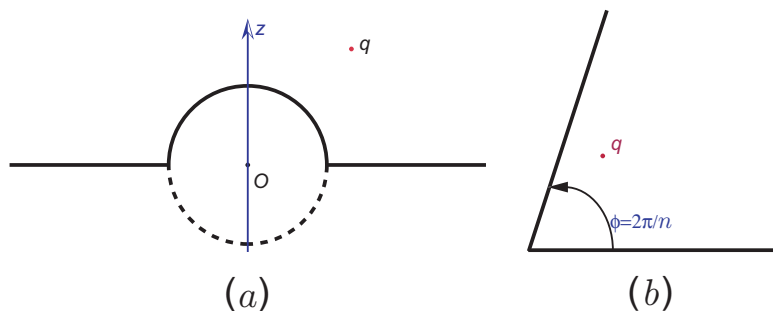
$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \sin(ax) \sin(by) \sin(cz).$$

---

**ZADANIE 2.5** \_\_\_\_\_ ○  
Bardzo długi przewód o promieniu  $r_0$  znajduje się w próżni na wysokości  $h$  nad nieskończoną doskonale przewodzącą uziemioną powierzchnią (przewód jest równoległy do powierzchni). Korzystając z metody obrazów wykazać, że pojemność elektryczna takiego układu na jednostkę długości wynosi

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(2h/r_0)}.$$

---



**ZADANIE 2.6** \_\_\_\_\_ ○  
Ładunek punktowy  $q$  znajduje się nad doskonale przewodzącą uziemioną płaszczyzną, na której znajduje się kulista wypukłość o promieniu  $R$ . Przyjmując, że środek tej wypukłości leży na płaszczyźnie (rysunek (a)) wyznaczyć potencjał tego układu. Przyjmując następnie, że ładunek znajduje się na osi  $z$  w odległości  $d$  od szczytu tej wypukłości, wyznaczyć gęstość powierzchniową ładunku na szczycie wypukłości. Skorzystać z metody obrazów.

---

**ZADANIE 2.7** \_\_\_\_\_ ○  
Znaleźć metodą obrazów potencjał pola elektrycznego ładunku  $q$  znajdującego się wewnątrz klina, utworzonego przez dwie doskonale przewodzące uziemione płaszczyzny, jeśli kąt między nimi wynosi  $2\pi/n$  (rysunek (b) dla  $n = 5$ ). Rachunki wykonać dla  $n = 5$  i  $6$ .

---

**ZADANIE 2.8** \_\_\_\_\_ ○  
Na zajęciach wyprowadziliśmy wzór na potencjał elektrostatyczny generowany przy rozkład kwadrupolowy

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_{ij} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}, \text{ gdzie } Q_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \rho(\mathbf{r}') x'_i x'_j.$$



Wykazać, że można go zapisać w postaci

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Theta_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5}, \text{ gdzie } \Theta_{ij} = \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}).$$

---

**ZADANIE 2.9** \_\_\_\_\_ ○

Wykazać, że siła i moment siły wywierane przez wolno zmienne pole elektryczne wynoszą

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Q_{ij} \partial_i \partial_j \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

oraz

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = 2(\hat{\mathbf{Q}}\nabla) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

gdzie wektor  $\hat{\mathbf{Q}}\nabla$  ma składowe kartezjańskie  $(\hat{\mathbf{Q}}\nabla)_k = Q_{kj} \partial_j$ . Wykazać, że energia oddziaływania elektrostatycznego kwadrupola z wolno zmiennym polem elektrycznym przyjmuje postać

$$V_Q(\mathbf{r}) = -Q_{ij} \partial_i E_j(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3} \Theta_{ij} \partial_i E_j(\mathbf{r}).$$

---

**ZADANIE 2.10** \_\_\_\_\_ ○

Czy możliwym jest, aby ładunek zlokalizowany w ograniczonej objętości mógł generować potencjał postaci

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{A}{r} + \frac{Bx^2}{r^5} + \text{wyrazy wyższych rzędów?}$$

Odpowiedź jest 'nie', ale dlaczego?

---

### 3 Seria III

**ZADANIE 3.1** \_\_\_\_\_ ○

Wyznaczyć potencjał naładowanej powierzchni kulistej o promieniu  $R$ , na której umieszczono ładunek o gęstości powierzchniowej  $\sigma(\theta) = \sigma_0 + \sigma_2 \cos^2 \theta$ , gdzie  $\sigma_0$  i  $\sigma_2$  są stałymi a  $\theta$  jest współrzędną kulistą. Skorzystać z ogólnego rozwiązania równania Laplace'a we współrzędnych kulistych

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)} \right) P_{\ell}(\cos \theta),$$

gdzie  $P_{\ell}(x)$  są wielomianami Legendre'a ( $P_0(x) = 1$ ,  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ ). Niech wypisane wielomiany Legendre'a służą za odpowiedź.

---

**ZADANIE 3.2** \_\_\_\_\_ ○

Obliczyć energie oddziaływania obłoku elektronowego z protonem w atomie wodoru w dwóch przypadkach, gdy elektron znajduje się w kulisto-symetrycznych stanach podstawowym i pierwszym wzbudzonym. W tych przypadkach gęstości objętościowe ładunku elektronu mają odpowiednio postać

$$\rho(r) = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a} \quad \text{i} \quad \rho(r) = -\frac{e}{8\pi a^3} \left(1 - \frac{r}{2a}\right)^2 e^{-r/a},$$

gdzie  $e$  jest ładunkiem elementarnym, czyli  $e = |e|$ , zaś  $a$  jest promieniem Bohra.

---

**ZADANIE 3.3** \_\_\_\_\_ ○

Inwersją nazywamy takie przekształcenie przestrzeni, przy którym każdy jej punkt  $\mathbf{r}$  przechodzi w punkt sprzężony  $\mathbf{r}'$  względem pewnej wybranej sfery inwersji o promieniu  $R$ , tak że

$$\mathbf{r}' = \frac{R^2}{r^2} \mathbf{r}.$$

Wykazać, że równanie Laplace'a jest niezmiennicze względem inwersji, tzn. jeśli  $f(\mathbf{r})$  jest rozwiązaniem równania

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(\mathbf{r}) = 0,$$

to funkcja

$$f'(\mathbf{r}') = \frac{R}{r'} f\left(\frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}'\right) \quad \text{spełnia równanie} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) f'(\mathbf{r}') = 0.$$

Wykazać, że ładunek punktowy o gęstości objętościowej  $\rho(\mathbf{r}) = q_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  transformuje się w ładunek punktowy o gęstości objętościowej  $\rho'(\mathbf{r}') = q'_0 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)$ , gdzie  $q'_0 = Rq_0/r_0$ .

---

**ZADANIE 3.4** \_\_\_\_\_ ○

Wykazać, że w pewnej szczególnej geometrii obrazem kuli przy inwersji jest płaszczyzna do niej styczna. Fakt ten można użyć do redukcji problemu wyznaczania potencjału elektrostatycznego od ładunku punktowego znajdującego się w pobliżu przewodzącej i uziemionej kuli do problemu wyznaczania potencjału elektrostatycznego od ładunku punktowego znajdującego się w pobliżu przewodzącej nieskończonej płaszczyzny. Udowodnić to.

---

**ZADANIE 3.5** \_\_\_\_\_ ○  
 Wykazać metodą separacji zmiennych we współrzędnych biegunowych, że ogólne rozwiązanie dwuwymiarowego równania Laplace'a ma postać

$$\phi(s, \phi) = D + C \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n s^n + D_n s^{-n})(A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi).$$

Posługując się tym rozwinięciem wyznaczyć pole elektryczne wytworzone przez doskonale przewodzący dysk o promieniu  $R$  umieszczony w stałym i jednorodnym polu elektrycznym  $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x$  oraz gęstość ładunku liniowego na brzegu dysku. Jak zmieni się wynik jeśli dysk jest dielektrykiem o przenikalności dielektrycznej  $\varepsilon$ ? Jak zachowuje się pole elektryczne w dużej odległości od dysku?

**ZADANIE 3.6** \_\_\_\_\_ ○  
 Obliczyć siłę działającą na punktowy ładunek  $q$  umieszczony we wnęce próżniowej o promieniu  $R$ , którą wycięto w ośrodku o przenikalności dielektrycznej  $\varepsilon$ . Odległość ładunku  $q$  od środka wnęki wynosi  $a < R$ .

**Rada:** z potencjału wydzielić wkład pochodzący od punktowego ładunku, a otrzymany nieskończony szereg nie starać się sumować.

**Prawdopodobna odpowiedź:**

$$F \sim q^2(\varepsilon - \varepsilon_0) \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell(\ell + 1) \frac{a^{2\ell-1}}{R^{2\ell+1}(\varepsilon(\ell + 1) - \varepsilon_0\ell)}.$$

**ZADANIE 3.7** \_\_\_\_\_ ○  
 Wykazać, że pole elektryczne w pustym wydrążeniu kulistym o promieniu  $a$  w kuli o promieniu  $b > a$  i stałej dielektrycznej  $\varepsilon$  jest jednorodne jeśli kula jest umieszczona w zewnętrznym stałym i jednorodnym polu elektrycznym  $\mathbf{E}_0$  (kule są koncentryczne). Jaka postać ma pole elektryczne w nieskończoności?

**Prawdopodobna częściowa odpowiedź:**

$$E = E_0 \frac{9\varepsilon\varepsilon_0}{9\varepsilon\varepsilon_0 + 2(\varepsilon - \varepsilon_0)^2(1 - a^3/b^3)},$$

a w nieskończoności jak od dipola.

**ZADANIE 3.8** \_\_\_\_\_ ○  
 Na wykładzie, posługując się odwzorowaniem konforemnym, wyznaczono potencjał od jednorodnie naładowanej nici umieszczonej w przewodzącym klinie o kącie rozwarcia  $\alpha$  w sytuacji gdy nić jest równoległa do krawędzi klina. Rozwiązanie polegało na przekształceniu obszaru klina w półpłaszczyznę. Ale ten sam problem możemy rozwiązać przekształcając obszar klina w obszar klina o prostym kącie rozwarcia, otrzymując (zapewne?) ten sam wynik. Sprawdzić to.

**ZADANIE 3.9** \_\_\_\_\_ ○  
Powłoka kulista o promieniu wewnętrznym  $a$  i zewnętrznym  $b$  wykonana jest z dielektryka, którego polaryzacja dana jest wzorem:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^2} \mathbf{r}.$$

Wyznaczyć gęstość objętościową i powierzchniową ładunków związanych oraz natężenie pola elektrycznego w całej przestrzeni.

---

**ZADANIE 3.10** \_\_\_\_\_ ○  
Ładunek punktowy  $q$  umieszczony jest w odległości  $d$  od środka jednorodnej kuli o promieniu  $R$  ( $d > R$ ) i przenikalności elektrycznej  $\varepsilon$ . Wyznaczyć potencjał w dowolnym punkcie przestrzeni. Pokazać, że w granicy  $\varepsilon \rightarrow 1$ , potencjał na zewnątrz kuli jest taki, jak od ładunku punktowego  $q$  umieszczonego w odległości  $d$  od uziemionej kuli przewodzącej. Wskazówka: Potencjał wytworzony przez ładunek punktowy  $q$  leżący na osi  $z$  w odległości  $d$  od początku układu współrzędnych, można, we współrzędnych sferycznych, wyrazić wzorem:

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta),$$

gdzie  $r_{>}$  ( $r_{<}$ ) to większą (mniejszą) z odległości  $d$  i  $r$ .

---

**ZADANIE 3.11** \_\_\_\_\_ ○  
Moment dipolowy i kwadrupolowy rozkładu ładunku wyrażają się wzorami:

$$\mathbf{p} = \int d^3r \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}),$$

$$Q_{ij} = \int d^3r (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}).$$

Obliczyć moment dipolowy i kwadrupolowy jednorodnie naładowanej ładunkiem  $Q$  elipsoidy o półosiach  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Przedyskutować przypadek elipsoidy obrotowej ( $b = c$ ) oraz kuli ( $a = b = c$ ). Wskazówka: Przy całkowaniu warto skorzystać ze zmodyfikowanych współrzędnych sferycznych  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , w których:  $x = ar \cos \varphi \sin \theta$ ,  $y = br \sin \varphi \sin \theta$ ,  $z = cr \cos \theta$ .

---

## 4 Seria IV

**ZADANIE 4.1** \_\_\_\_\_ ○

Dwie, długie współosiowe walcowe powierzchnie przewodzące o promieniach  $a$  i  $b$  ( $a < b$ ) zamknięte są pionowo w ciekłym dielektryku liniowym. Przy różnicy potencjałów  $V$  pomiędzy powierzchniami, poziom cieczy dielektrycznej, wypełniającej przestrzeń między nimi, przewyższa o  $h$  poziom cieczy na zewnątrz. Znaleźć podatność elektryczną  $\chi_e$  cieczy. Gęstość cieczy wynosi  $\rho$ , a wartość przyspieszenia ziemskiego  $g$ .

---

**ZADANIE 4.2** \_\_\_\_\_ ○

Wyznaczyć indukcję pola magnetycznego w środku wielokąta foremnego o  $n$  bokach, przez który płynie prąd o natężeniu  $I$ . Promień okręgu wpisanego w ten wielokąt wynosi  $R$ . Sprawdzić, że w granicy  $n \rightarrow \infty$  indukcja pola magnetycznego w środku jest taka, jak od okręgu o promieniu  $R$ , w którym płynie prąd  $I$ .

---

**ZADANIE 4.3** \_\_\_\_\_ ○

Dysk, naładowany ładunkiem o stałej gęstości powierzchniowej  $\sigma$ , obraca się z prędkością kątową  $\omega$ . Korzystając z prawa Biot-Savarta, wyznaczyć indukcję pola magnetycznego na osi dysku w odległości  $d$  od jego środka.

Wskazówka: Ładunek o powierzchniowej gęstości  $\sigma(\mathbf{r})$ , poruszający się z prędkością  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  wytwarza prąd o gęstości powierzchniowej  $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$ .

---

**ZADANIE 4.4** \_\_\_\_\_ ○

Indukcję magnetyczną dipola o momencie dipolowym  $\mathbf{m}$ , można wyrazić wzorem:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5}.$$

Wyznaczyć ściśle indukcję pola magnetycznego w odległości  $z$  nad środkiem symetrii kwadratowej ramki o boku  $a$ , przez którą płynie prąd o natężeniu  $I$ , a następnie znaleźć moment dipolowy  $\mathbf{m}$  tej ramki i pokazać, że ściśle wyrażenie na indukcję redukuje się do wyrażenia na indukcję od dipola przy  $z \gg a$ .

---

**ZADANIE 4.5** \_\_\_\_\_ ○

Wyznaczyć moment dipolowy dysku o promieniu  $R$ , naładowanego ładunkiem o stałej gęstości powierzchniowej  $\sigma$  i obracającego się z prędkością kątową  $\omega$ .

---

**ZADANIE 4.6** \_\_\_\_\_ ○

Potencjał wektorowy dipola o momencie dipolowym  $\mathbf{m}$ , dany jest wzorem:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Wyznaczyć magnetyczny moment dipolowy kuli o promieniu  $R$  jednorodnie naładowanej ładunkiem  $Q$  i obracającej się z prędkością kątową  $\omega$ . Obliczyć ściśle potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$  w dowolnym punkcie  $(r, \theta)$  na zewnątrz kuli i sprawdzić, że wynik pokrywa się z potencjałem wektorowym od dipola.

---

**ZADANIE 4.7** \_\_\_\_\_ ○  
 Wewnątrz nieskończenie długiego przewodzącego walca o promieniu  $b$  jest walcowe wydrążenie o promieniu  $a$  ( $a < b$ ). W tym przewodniku płynie prąd o gęstości objętościowej  $j$  i kierunku równoległym do osi walca. Znaleźć wektor indukcji magnetycznej  $\mathbf{B}$  w wydrążeniu.

**ZADANIE 4.8** \_\_\_\_\_ ○  
 Przewodnik, w kształcie okręgu o promieniu  $R$ , w którym płynie prąd o natężeniu  $I$ , ma środek w początku układu współrzędnych, a jego oś znajduje się w płaszczyźnie  $(xz)$  pod kątem  $\theta_0$  do osi  $z$ . Przewodnik znajduje się w polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B} = B_0[(1+\beta y)\mathbf{e}_x + (1+\beta x)\mathbf{e}_y]$ . Znaleźć siłę działającą na ten przewodnik.

**ZADANIE 4.9** \_\_\_\_\_ ○  
 W przewodniku o kształcie okręgu o promieniu  $R$  położonego w płaszczyźnie  $(xy)$  i środku w początku układu współrzędnych, płynie prąd o natężeniu  $I$ . Pokazać, że potencjał wektorowy  $\mathbf{A}$  pochodzący od tego przewodnika dany jest (we współrzędnych sferycznych) wzorem:

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0 R I}{\pi \sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta}} \left[ \frac{(2 - k^2)K(k) - 2E(k)}{k^2} \right] \mathbf{e}_\varphi$$

gdzie

$$k^2 = \frac{4Rr \sin \theta}{R^2 + r^2 + 2Rr \sin \theta}$$

a  $K$  i  $E$  to całki eliptyczne:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} d\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}.$$

Wyznaczyć potencjał wektorowy na osi  $z$ .

**ZADANIE 4.10** \_\_\_\_\_ ○  
 Kula wykonana z liniowego materiału magnetycznego, o podatności magnetycznej  $\chi_m$ , została umieszczona w jednorodnym polu zewnętrznym o indukcji  $\mathbf{B}_0$ . Znaleźć indukcję pola magnetycznego wewnątrz kuli.

Wskazówka: W przypadku braku prądów swobodnych ( $\mathbf{j} = 0$ ) natężenie pola magnetycznego spełnia równanie:  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ , wobec czego można je zapisać jako gradient pola skalarnego:  $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ . Ponieważ dywergencja natężenia pola magnetycznego jest związana z dywergencją magnetyzacji,  $\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$ , potencjał skalarny  $\psi$  spełnia równanie Poissona z  $\nabla \cdot \mathbf{M}$  w roli źródła,

$$\Delta\psi = \nabla \cdot \mathbf{M}.$$

**ZADANIE 4.11** \_\_\_\_\_ ○  
 Prąd o natężeniu  $I_1$  płynie w przewodniku w kształcie okręgu o promieniu  $R$ , a prąd o natężeniu  $I_2$  w przewodniku prostoliniowym. Oba przewodniki leżą w jednej płaszczyźnie. Środek przewodnika okrężnego znajduje się w odległości  $d > R$  od przewodnika prostoliniowego. Znaleźć siłę wzajemnego oddziaływania obu przewodników.

**ZADANIE 4.12** \_\_\_\_\_ ○  
 Pokazać, że współczynnik indukcji wzajemnej pomiędzy pętlą w kształcie trójkąta równobocznego a prostoliniowym przewodnikiem umieszczonym w płaszczyźnie, w której leży ten trójkąt, wynosi

$$L = \frac{4}{\sqrt{3}} \left[ (a+b) \ln \left( 1 + \frac{a}{b} \right) - a \right],$$

gdzie  $a$  jest wysokością trójkąta, natomiast  $b$  jest odległością pomiędzy prostoliniowym przewodnikiem a bokiem trójkąta, do którego ten przewodnik jest równoległy. Zastanowić się nad dwiema możliwościami: gdy bok trójkąta równoległego do prostej jest bliżej niż przeciwległy wierzchołek lub na odwrót.

**ZADANIE 4.13** \_\_\_\_\_ ○  
 W pewnym stanie wzbudzonym atomu wodoru prąd elektryczny we współrzędnych kulistych ma postać

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{3^8} \frac{e\hbar r^3}{\pi m_e a_0^7} \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right) \sin\theta \cos^2\theta \mathbf{e}_\varphi,$$

gdzie  $a_0$  jest promieniem Bohrowskim, a  $m_e$  i  $e$  masą i ładunkiem elektronu. Wyznaczyć dipolowy moment magnetyczny dla takiego prądu.

**ZADANIE 4.14** \_\_\_\_\_ ○  
 Wyznaczyć dipolowy moment magnetyczny dla gęstości prądu postaci

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \times \nabla) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

gdzie  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{r}_0$  są wektorami stałymi.

**ZADANIE 4.15** \_\_\_\_\_ ○  
 Wyznaczyć dipolowy moment magnetyczny dla gęstości prądu postaci

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \nabla \times (\mathbf{a}F(r)),$$

gdzie  $\mathbf{a}$  jest stałym wektorem a funkcja  $F(r)$  dąży do zera w nieskończoności szybciej niż  $r^{-3}$ .

**ZADANIE 4.16** \_\_\_\_\_ ○  
 W pewnym stanie wzbudzonym atomu wodoru prąd elektryczny we współrzędnych kulistych ma postać

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2 \cdot 3^8} \frac{e\hbar r^3}{\pi m_e a_0^7} \exp\left(-\frac{2r}{3a_0}\right) \sin^3\theta \mathbf{e}_\varphi,$$

gdzie  $a_0$  jest promieniem Bohrowskim, a  $m_e$  i  $e$  masą i ładunkiem elektronu. Wyznaczyć indukcję pola magnetycznego generowanej tym prądem w początku układu współrzędnych, czyli tam gdzie znajduje się proton.

**ZADANIE 4.17** \_\_\_\_\_ ○  
 We współrzędnych kulistych rozkład ładunku elektrycznego ma postać  $\rho(r, \theta)$ . Ładunek ten zakrecono z prędkością kątową  $\omega$  wokół osi symetrii  $z$ . Wyznaczyć wektor indukcji pola magnetycznego w początku układu współrzędnych, gdy a) ładunek  $Q$  rozłożony jest jednorodnie wewnątrz kuli o promieniu  $R$ ; b) rozłożony jest jednorodnie na powierzchni tej kuli.

## 5 Seria V

### ZADANIE 5.1 ○

Przewodząca sfera o promieniu  $R$  obraca się wokół osi  $z$  z prędkością kątową  $\omega$ , w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$ . Obliczyć siłę elektromotoryczną, jaka powstaje pomiędzy biegunem a równikiem sfery.

### ZADANIE 5.2 ○

Założmy, że natężenie pola elektrycznego ma postać

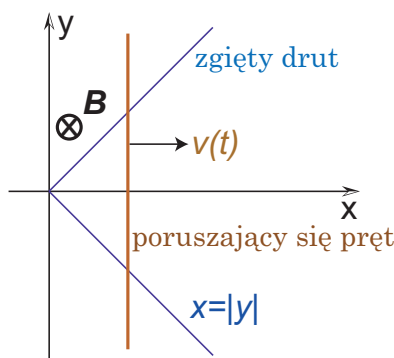
$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = A \frac{\sin \theta}{r} \left[ \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \mathbf{e}_\varphi$$

gdzie  $\omega/k = c$ .

Wykazać, że  $\mathbf{E}$  spełnia wszystkie równania Maxwella w próżni i znaleźć odpowiadające mu pole magnetyczne.

Obliczyć wektor Poyntinga oraz uśredniając go po czasie znaleźć wektor natężenia promieniowania. Przedyskutować jego kierunek oraz zanik długości w przestrzeni.

Wyznaczyć całkowitą moc wypromieniowaną przez powierzchnię sfery o środku w początku układu współrzędnych.



### ZADANIE 5.3 ○

Nieskończony prostoliniowy drut o oporze na jednostkę długości  $R_0$  zgięto w pewnym punkcie pod kątem prostym i mocno przyklejono 'Kropelką' do poziomej powierzchni. Wybierzmy układ współrzędnych kartezjańskich tak, aby powierzchnia ta pokrywała się z płaszczyzną  $Oxy$ , zgięcie druta znajdowało się w początku układu współrzędnych, a oś  $Ox$  była osią symetrii układu (rysunek). Na drucie tym położono następnie długi pręt o całkowitej masie  $m$  i tym samym oporze na jednostkę długości  $R_0$ . W chwili  $t = 0$ , gdy położenie pręta pokrywało się z osią  $Oy$ , nadano mu prędkość  $v_0$  w kierunku osi symetrii  $Ox$ . Wyznaczyć prąd elektryczny płynący przez pręt w funkcji czasu, jeśli cały układ umieszczony jest w stałym i jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_z$ ,  $B > 0$ . Określić z reguły Lenza kierunek prądu oraz maksymalną odległość, na którą przemieści się pręt. Zaniedbać wpływ sił tarcia i przyjąć, że pręt jest tak długi, że zawsze leży na drucie. Obliczyć całkowite ciepło Joule'a wydzielone na oporze i porównać je z początkową energią kinetyczną pręta. Rozwiązując równanie Newtona przypomnieć sobie, że pochodną po czasie  $x^2(t)$  jest  $2x(t)\dot{x}(t)$ .



**ZADANIE 5.4** \_\_\_\_\_ ○

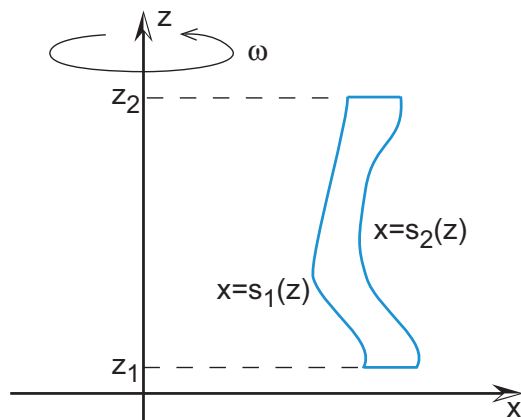
Pomiędzy dwiema równoległymi okrągłymi płytami o promieniach  $R$  i oddległych od siebie o  $d \ll R$  istnieje jednorodne pole elektryczne  $\mathbf{E}(t) = E(t)\mathbf{e}_z$ , które zmienia się w czasie. Na zewnątrz, dla  $\rho > R$  pole elektryczne znika. Znaleźć wektor indukcji pola magnetycznego  $\mathbf{B}(\rho, t)$ , czyli jego długość jako funkcję czasu i odległości od osi symetrii oraz jego kierunek i zwrot. W jakich warunkach pole magnetyczne będzie niezależne od czasu?

---

**ZADANIE 5.5** \_\_\_\_\_ ○

Jednorodne pole magnetyczne  $\mathbf{B}(t) = B(t)\mathbf{e}_z$ , które zmienia się w czasie, wypełnia cylinder o osi symetrii wzdłuż osi  $z$  i o promieniu  $R$ . Na zewnątrz cylindra, dla  $\rho > R$  pole magnetyczne znika. Znaleźć wektor pola elektrycznego, czyli jego długość jako funkcję czasu i odległości od osi symetrii oraz jego kierunek i zwrot. W jakich warunkach pole elektryczne będzie niezależne od czasu?

---

**ZADANIE 5.6** \_\_\_\_\_ ○

Płaską figurę ograniczoną liniami  $z = z_1$ ,  $z = z_2$ ,  $x = s_1(z)$  i  $x = s_2(z)$  ( $z_2 > z_1$ ,  $s_2(z) > s_1(z) \geq 0$ ) obrócono wokół osi  $Oz$ , otrzymując bryłę o symetrii obrotowej. Następnie bryłę tę naładowano ładunkiem o gęstości objętościowej  $\rho(s, z)$  (użyto współrzędnych walcowych) i obrócono z częstością  $\omega$  wokół osi symetrii (patrz rysunek). Wykazać, że jeśli gęstość objętościowa masy jest proporcjonalna do gęstości objętościowej ładunku, to

$$\mathbf{m} = \frac{Q}{2M}\mathbf{L},$$

gdzie  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $Q$  i  $M$  są odpowiednio magnetycznym momentem dipolowym, momentem pędu, całkowitym ładunkiem i całkowitą masą tej bryły. Skorzystać z faktu, że magnetyczny moment dipolowy płaskiego drutu otaczającego powierzchnię o całkowitym polu  $A$  i po którym płynie prąd o natężeniu  $I$  co do wartości wynosi  $IA$ .

Wyznaczyć magnetyczny moment dipolowy  $\mathbf{m}$  jeśli  $z_1 = -R$ ,  $z_2 = R$ ,  $s_1(z) = 0$ ,  $s_2(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$  oraz  $\rho(s, z) = \rho_0(1 - (s^2 + z^2)/R^2)$ , gdzie  $R$  i  $\rho_0$  są stałe.

---

**ZADANIE 5.7** 

---

 ○

Dwa nieskończenie cienkie dyski o promieniu  $R_0$  umieszczono koncentrycznie nad sobą w odległości  $d \ll R_0$ . Górny i dolny dysk naładowano odpowiednio ładunkami  $+Q_0$  i  $-Q_0$ . W chwili  $t = 0$  środki dysków połączono prostym drutem o oporze  $R$ . Zaniedbując indukcyjność układu i przyjmując, że pomiędzy dyskami pole elektryczne jest jednorodne:

- a) Znaleźć zależność ładunków zgromadzonych na dyskach od czasu.
- b) Wyznaczyć powierzchniową gęstość prądu elektrycznego płynącego po powierzchni jednego z dysków.
- c) Wyznaczyć pole magnetyczne między dyskami w funkcji czasu.

Przyjąć, że opór  $R$  jest na tyle duży, że gęstość powierzchniowa ładunku na dyskach dla ustalonego czasu jest jednorodna.

---

**ZADANIE 5.8** 

---

 ○

Metalową pętelkę w kształcie koła o promieniu  $a$ , masie  $m$  (niestety, należy wyznaczyć moment bezwładności) i całkowitym oporze elektrycznym  $R$  umieszczono w polu o indukcji magnetycznej  $B$  (możemy przyjąć, że  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ ). Następnie zakrecono nią wokół osi prostopadłej do pola magnetycznego (np. wokół osi  $x$ ) z początkową prędkością kątową  $\omega_0$ . W wyniku indukcji w pętelce generowany jest prąd elektryczny i wydzielana się ciepło Joule'a, co w konsekwencji prowadzi do zmniejszania się częstości obrotu. Wyznaczyć prawo (tj. postać równania różniczkowego) określające zanik w czasie energii kinetycznej pętelki. Przyjąć następnie, że po jednym obrocie zanik energii kinetycznej jest niewielki, czyli równanie to można uśrednić po szybkich oscylacjach. Wyznaczyć tempo zaniku uśrednionej po jednym obrocie energii kinetycznej pętelki. Powinniśmy otrzymać wykładniczy zanik energii w czasie. Po jakim czasie częstość obrotu zmniejszy się  $e$ -razy ( $e$  to jest liczba  $e \approx 2.71\dots$ )? Oczywiście, w trakcie obrotu pętelka również może promieniować, co dodatkowo zmniejsza częstość obrotu. Pominąć ten efekt jako wyższego rzędu; przynajmniej chwilowo.

---

**ZADANIE 5.9** 

---

 ○

$\tilde{g}(\omega)$  jest funkcją holomorficzną w górnej półpłaszczyźnie taką, że dla rzeczywistych  $\omega$

$$\operatorname{Im}\tilde{g}(\omega) = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

Wyznaczyć  $\operatorname{Rm}\tilde{g}(\omega)$  i  $\tilde{g}(\omega)$ .

---

**ZADANIE 5.10** 

---

 ○

Wyprowadzić związki dyspersyjne Kramersa-Kröniga dla ośrodka o stałym w czasie przewodnictwie.

---

**ZADANIE 5.11** 

---

 ○

Znaleźć rozkład kątowny promieniowania i całkowitą wypromieniowaną moc dla następujących układów:

1. Ładunek  $Q$  równomiernie rozłożony w kropki, której promień równomiernie pulsuje zgodnie ze wzorem:

(a)  $R(t) = R_0[1 + a \cos(\omega t)],$

(b)  $R(\theta, t) = R_0[1 + aP_2(\cos \theta) \cos(\omega t)],$

gdzie  $a \ll 1$  a  $P_2(x)$  jest wielomianem Legendre'a.

2. Cienka liniowa antena o długości  $d$  wzbudzona stojącą falą prądu o amplitudzie  $I_0$  i węzłach na końcach anteny ( $d = \frac{n}{2}\lambda$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną).

3. Cienka liniowa antena o długości  $d$  wzbudzona biegnącą falą prądu  $I(z, t) = I_0 \exp(i(kz - \omega t))$ , gdzie  $k = \omega/c$ , a  $z$  jest współrzędną punktu anteny.

**ZADANIE 5.12** \_\_\_\_\_ ○  
Cząstka o ładunku  $e$  porusza się ze stałą prędkością  $v$ . Znaleźć rozkład pola elektromagnetycznego wytworzonego przez taki ruch na fale płaskie. Jaki związek dyspersyjny spełniają takie fale?

**ZADANIE 5.13** \_\_\_\_\_ ○  
Wyznaczyć moc wypromieniowaną przez dipol obracający się w zadanej płaszczyźnie ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Jaka jest polaryzacja tego promieniowania? przyjąć, że ruch jest nierelatywistyczny.

**ZADANIE 5.14** \_\_\_\_\_ ○  
Wyznaczyć tor cząstki relatywistycznej o ładunku  $q$  i masie  $m$  poruszającej się w jednorodnym i stałym polu elektrycznym  $\mathbf{E}$ . Wyznaczyć moc wypromieniowaną w czasie ruchu i polaryzację generowanego promieniowania.

**ZADANIE 5.15** \_\_\_\_\_ ○  
Wykazać, że przy zderzeniach dwóch jednakowych cząstek nie występuje promieniowanie dipolowe.

**ZADANIE 5.16** \_\_\_\_\_ ○  
Wróćmy do zadania 5.8. Wyznaczyć dla obracającej się pętli magnetyczny moment dipolowy w funkcji czasu a następnie wyznaczyć uśrednioną po jednym obrocie moc promieniowania. Kiedy jest ona porównywalna z mocą wydzielanego ciepła?