Biofizyka
(1100-114BFIZ11)

Jan M. Antosiewicz

Zakład Biofizyki
Instytut Fizyki Doświadczalnej
Wydział Fizyki

Wykład 2

25 lutego, 2025

Matematyka niezbędna do przejścia od biologii molekularnej do biofizyki molekularnej (w tym Wykładzie)

http://www.fuw.edu.pl/~jantosi/

jantosi@fuw.edu.pl

PROGRAM STUDIÓW
Biotechnologia

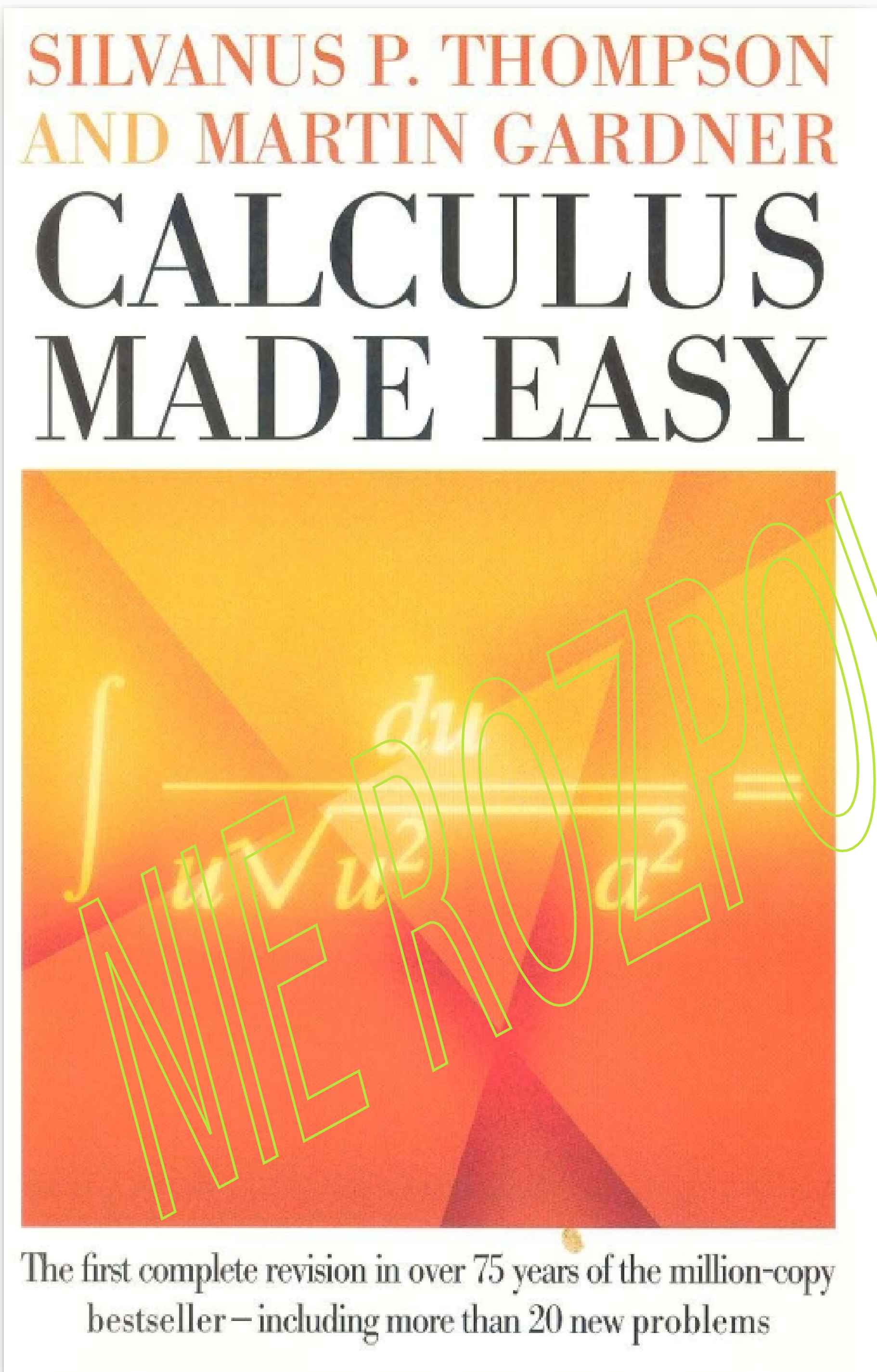
tytuł zawodowy nadawany absolwentom: licencjat

Rok studiów: pierwszy
Semestr: pierwszy

MATEMATYKA (45 godzin ćwiczeń)

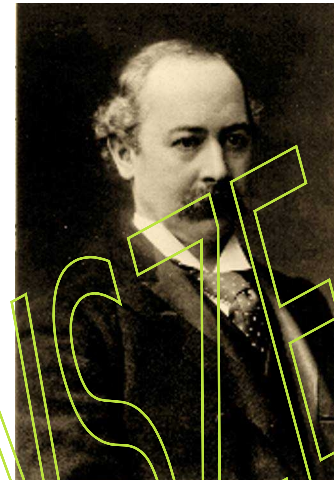
Studenci zapoznają się z podstawowymi pojęciami matematycznymi, takimi jak: zbiory, liczby, relacje, funkcje. Omówione zostaną podstawowe typy funkcji, a następnie podstawy analizy matematycznej. Wstęp do teorii równań różniczkowych zwyczajnych posłuży jako podstawa do zapoznania się z modelami matematycznymi zjawisk przyrodniczych. Z kolei podstawy rachunku prawdopodobieństwa stanowią wprowadzenie do statystyki i modeli probabilistycznych.

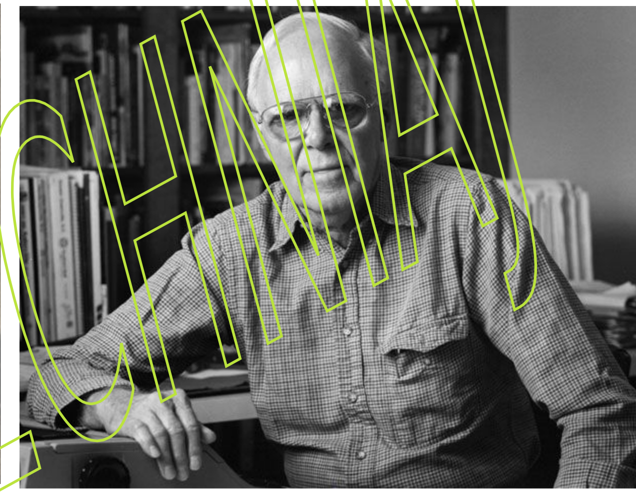
Po studiach magisterskich, student: Ma zaawansowaną wiedzę z matematyki, fizyki i biofizyki, chemii wyspecjalizowaną w kierunku biotechnologii



1998

Rachunek różniczkowy uczyniony łatwym





Silvanus Phillips Thompson (1851-1916) był angielskim profesorem fizyki w City and Guilds Technical College w Finsbury w Anglii. Został wybrany do Towarzystwa Królewskiego w 1891 roku i był znany ze swojej pracy jako inżynier elektryk i autor. Najtrwalszą publikacją Thompsona jest jego tekst z 1910 r. Calculus Made Easy, który uczy podstaw rachunku z użyciem wielkości nieskończenie małych.

Martin Gardner (1914-2010) był amerykańskim pisarzem popularnonaukowym zajmującym się matematyką i naukami ścisłymi, który publikował w czasopiśmie „Scientific American” felietony poświęcone rozrywkom matematycznym.

Dwa główne, “okropne”, symbole używane w rachunku różniczkowym to:

(1) d, co oznacza po prostu „trochę”. Zatem dx oznacza trochę x; lub du oznacza trochę u. Te małe kawałki można uważać za nieskończenie małe.

(2) ∫, który jest po prostu rozciągniętym S i można go nazwać „sumą”. Zatem ∫dx oznacza sumę wszystkich małych kawałków x; lub ∫dt oznacza sumę wszystkich małych kawałków t. Zwykli matematycy nazywają ten symbol „całką”. Jeśli uznamy, że x składa się z wielu małych kawałków, z których każdy nazywany jest dx, to jeśli dodamy to wszystko do siebie, otrzymamy sumę wszystkich dx (co jest tym samym, co całość x). Słowo „całka” oznacza po prostu „całość”.

nieskończenie mały nie jest tym samym, co dokładnie równy zeru

jeśli dx jest nieskończenie małe, to $\int dx = x$

jeśli dx jest dokładnie równe zero, to $\int dx = 0$

Co to jest funkcja?

Żadne pojęcie w matematyce, zwłaszcza w rachunku różniczkowym, nie jest bardziej fundamentalne niż pojęcie funkcji. Termin ten został po raz pierwszy użyty w liście z 1673 roku napisanym przez Gottfrieda Wilhelma Leibniza, niemieckiego matematyka i filozofa, który wynalazł rachunek różniczkowy niezależnie od Izaaka Newtona. Od tego czasu termin ten ulegał stopniowemu rozszerzaniu znaczenia.

W tradycyjnym rachunku różniczkowym funkcja jest definiowana jako relacja pomiędzy dwoma wielkościami zwanymi zmiennymi, ponieważ ich wartości sie zmieniają. Nazwijmy je x i y. Jeśli każda wartość x jest powiązana z dokładnie jedną wartością y, wówczas mówimy, że y jest funkcją x. Zwyczajowo używa się x dla tak zwanej zmiennej niezależnej, a y dla tak zwanej zmiennej zależnej, ponieważ jej wartość zależy od wartości x.

$$(x, y); \quad \textit{kazdemu x odpowiada dokładnie jedno } y: \; x \rightarrow y; \quad y = y(x);$$

Inne formy zapisu funkcji:

$$y = f(x); \quad y = F(x);$$

Przykłady funkcji:

$$y = x^2; \quad y = \sin x; \quad y = e^x; \quad y = \ln x$$

Funkcje z kilkoma zmiennymi niezależnymi, np.:

$$z = f(x, y); \qquad z = x^2 + y^2; \; z = \sin x + \cos y; \; z = e^x \cdot e^y = e^{x+y}; \; z = a \cdot \ln x - \ln y = \ln \frac{x^a}{y}$$

Co to jest granica?

Zrozumienie rachunku różniczkowego jest możliwe, choć trudne, bez zrozumienia znaczenia granicy. Pochodna, podstawowe pojęcie rachunku różniczkowego, jest granicą. Całka, podstawowe pojęcie rachunku całkowego, to granica.

Ciąg liczbowy to zbiór liczb w określonej kolejności. Liczby nie muszą być różne i nie muszą być liczbami całkowitymi. Rozważmy sekwencję 1, 2, 3, 4, ... To są tylko dodatnie liczby całkowite. Jest to ciąg nieskończony, ponieważ trwa bez przerwy. Gdyby się zatrzymał, byłby to ciąg skończony.

Jeśli składniki skończonego ciągu zostaną dodane, aby otrzymać skończoną sumę, nazywa się to szeregiem. Jeśli szereg jest nieskończony, suma dowolnego określonego wyrazu nazywana jest „sumą częściową”. Jeśli sumy cząstkowe nieskończonego szeregu zbliżają się coraz bardziej do liczby k, tak że kontynuując szereg, można uzyskać sumę tak bliską k, jak sobie życzysz, wówczas k nazywa się granicą sum częściowych, lub granicą nieskończonego szeregu. Mówi się, że wyrazy „zbiegają się” do k. Jeśli nie ma zbieżności, mówimy, że szereg jest „rozbieżny”.

Co to jest granica? (cd)

Znaleziono wiele pomysłowych technik określania zbieżności lub rozbieżności dowolnego szeregu nieskończonego, a także sposobów, czasami niełatwych, na znalezienie granicy. Jeśli wyrazy szeregu maleją w postępie geometrycznym (każdy wyraz jest tym samym ułamkiem poprzedniego), znalezienie granicy jest łatwe. Oto jak to działa w przypadku szeregu "połówkowego" 1+1/2+1/4+1/8+ ... . Oznaczmy przez x sumę całego szeregu: x=1+1/2+1/4+1/8+ ... . Pomnóżmy każdą stronę tego równania przez 2:

$$2x = 2 + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \cdots = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 + x \;\Rightarrow\; x = 2$$

Mamy też z definicji szeregu geometrycznego:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q = const. \;\Rightarrow\; a_i = a_0 q^n; \qquad s = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_i = \frac{a_0}{1-q} \quad gdy \;\; |q| < 1$$

Chociaż Archimedes nie znał rachunku różniczkowego, przewidział całkowanie, obliczając π jako granicę obwodów wielokątów foremnych w miarę wzrostu ich liczby boków. W języku nieskończenie małych okrąg można postrzegać jako obwód wielokąta foremnego o nieskończonej liczbie boków, którego obwód składa się z nieskończonej liczby odcinków linii prostych, każdy o nieskończenie małej długości.

Co to jest pochodna?

Załóżmy, że mamy zmienną y, która jest funkcją zmiennej x. Zmiana w x powoduje zmianę w y, ze względu na tę zależność.

Załóżmy, że zmieniamy x o dx: x → x+dx. Wtedy, y również się zmieni i stanie się y+dy. Tutaj zmiana dy może być w niektórych przypadkach dodatnia, w innych ujemna i nie będzie (z wyjątkiem bardzo rzadkich przypadków) tej samej wielkości co dx.

Teraz, przechodzimy do rachunku różniczkowego poprzez rozważenie stosunku dy do dx, gdy oba są nieskończenie małe.

Nazywamy stosunek dy/dx, „współczynnikiem różniczkowym y względem x". Termin ten został później zastąpiony prostszym słowem „pochodna". Jest to uroczysta, naukowa nazwa tej bardzo prostej rzeczy.

Użyjmy symbolu F zamiast y $F_1 = F_1(x); \quad F_2 = F_2(x, y)$

Definicje pochodnych zwyczajnych i cząstkowych z użyciem symboli F_1, F_2.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_1(x + \Delta x) - F_1(x)}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dF_1}{dx} \equiv F'_1;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{F_2(x + \Delta x, y) - F_2(x, y)}{\Delta x} \right)_{y = const} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} \right)_y$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{F_2(x, y + \Delta y) - F_2(x, y)}{\Delta y} \right)_{x = const} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} \right)_x$$

PRZYKŁAD

Rozważmy ciało poruszające się ze zmienną prędkością v(t) po prostym torze. Można założyć, że między chwilą t i t+Δt ciało porusza się ze stałą prędkością v(t). Im mniejsze jest Δt tym lepiej jest spełniony warunek stałości v(t). Aby otrzymać drogę przebytą przez ciało pomiędzy momentami t_1 i t_2 należy różnicę czasów t_2-t_1 podzielić przez Δt, otrzymamy N początkowych prędkości $v(t_i)$

$$s=v(t_1)\Delta t+v(t_2)\Delta t+\cdots+v(t_N)\Delta t\equiv\sum_{i=1}^{i=N}v(t_i)\Delta t \underset{\Delta t\to dt}{\to} \int_{t=t_1}^{t=t_2}v(t)\,dt$$

$$\lim_{dt\to 0}\frac{s(t+dt)-s(t)}{dt}\overset{\text{def}}{=}\frac{ds}{dt}=v(t)$$

Dla stałej prędkości, v(t)=c:

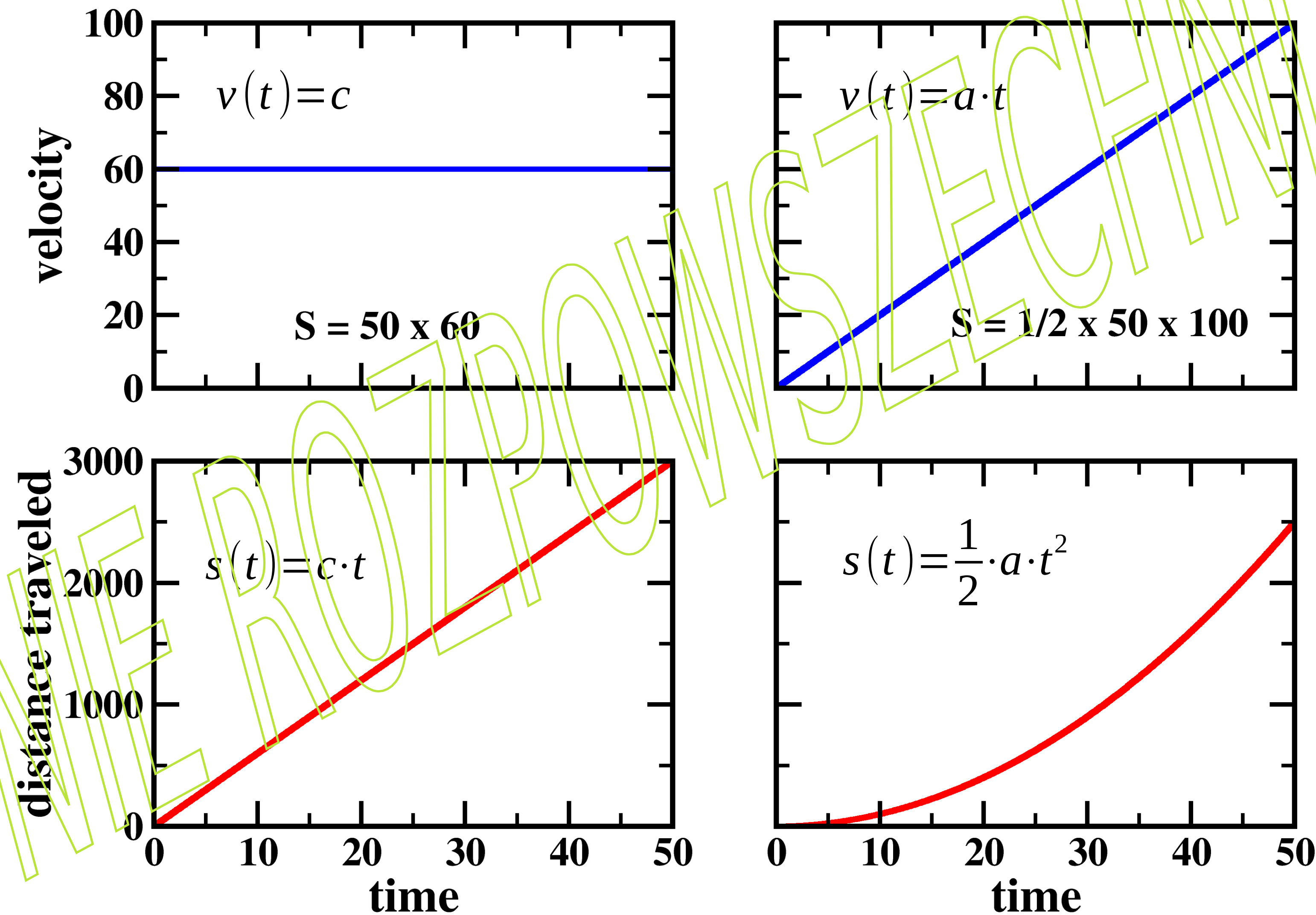
$$s=\sum_{t=t_1}^{t=t_2}c\,\Delta t=\int_{t=t_1}^{t=t_2}c\,dt=c\int_{t=t_1}^{t=t_2}dt=c(t_2-t_1) \qquad \lim_{dt\to 0}\frac{c\cdot(t+dt)-c\cdot t}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{c\cdot dt}{dt}=c$$

Dla ruchu jednostajnie przyspieszonego z zerową prędkością początkową, v(t)=at v(0)=0:

$$s=\sum_{t=0}^{t=t_f}a\cdot t_i\,\Delta t\equiv\int_{t=\text{¿}}^{t=t_f}a\cdot t\,dt=a\int_{t=0}^{t=t_f}t\,dt=\frac{1}{2}a t_f^2$$

Sprawdzenie wyniku poprzez wykonanie różniczkowania posługując się definicją pochodnej:

$$\lim_{dt\to 0}\frac{\frac{1}{2}a\cdot(t+dt)^2-\frac{1}{2}a\cdot t^2}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{\frac{1}{2}a\cdot(t^2+2tdt+dt^2)-\frac{1}{2}a\cdot t^2}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{at\cdot dt}{dt}=at$$



velocity
$v(t)=c$
S = 50 x 60
$v(t)=a\cdot t$
S = 1/2 x 50 x 100
distance traveled
$s(t)=c\cdot t$
$s(t)=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$
time
time
0
20
40
60
80
100
0
1000
2000
3000
0
10
20
30
40
50

funkcje, ich pochodne i całki przydatne na tych wykładach

$\frac{dF}{dx}$	F	$\int F\,dx$
0	a	$ax+C$
1	$x \pm a$	$\frac{1}{2}x^2 \pm ax+C$
a	ax	$\frac{1}{2}ax^2+C$
nx^{n-1}	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$
$-x^{-2}$	x^{-1}	$\ln x+C$
e^x	e^x	e^x+C
$a\cdot e^x$	e^{ax}	$\frac{1}{a}\cdot e^x+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x(\ln x-1)+C$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x+C$
$-\sin x$	$cosx$	$\sin x+C$

Intrygującym przykładem wśród pokazanych pochodnych jest

$$\frac{d\,e^x}{dx} = e^x \qquad \left(\text{równoważne zapisy} \quad e^x \equiv \exp x \right)$$

e jest liczbą Eulera

e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995… (liczba niewymierna)

Liczba e może być zdefiniowana na kilka równoważnych sposobów.
Przykłady:

Jako granica ciągu: $$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \qquad e = \lim_{y \to 0} \left(1 + y \right)^{\frac{1}{y}}$$

Jako suma szeregu: $$e = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!}$$

Liczba e, będąca podstawą logarytmów naturalnych, odgrywa ważną rolę w analizie matematycznej.

Logarytm liczby x>0 o podstawie b>0, b≠1, oznaczany u = log$_b$ x, definiujemy jako wykłdnik potęgi o podstawie b, której wartość jest równa liczbie x.

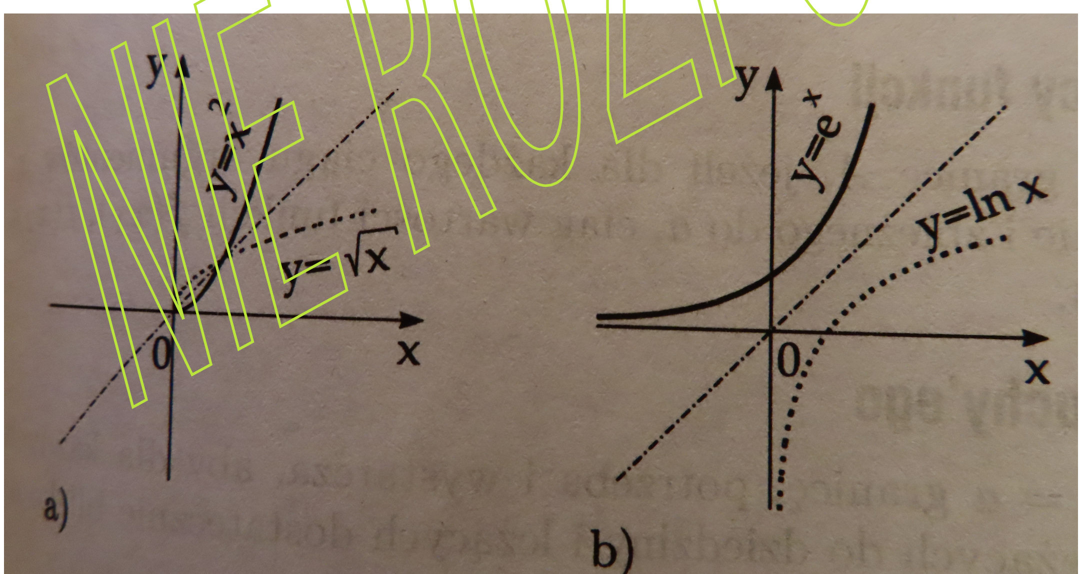
$$b^u = x \quad \Rightarrow \quad \log_b x = u$$

Funkcja odwrotna

Rozważamy funkcję *y*=f(*x*). Załóżmy, że istnieje przyporządkowanie odwrotne, dla każdego y istnieje dokładnie jeden *x*, taki że f(*x*)=*y*. Tak określone przyporządkowanie nazywamy funkcją odwrotną funkcji f i oznaczamy przez φ lub f^{-1}, co należy rozumieć jako znak graficzny. Przechodząc od *y*=f(*x*) do jej funkcji odwrotnej, możemy zamienić rolami *x* z *y* i następnie rozwiązać równianie *x*=f(*y*) względem *y*, tak że otrzymamy *y*=φ(*x*). Przedstawienia *y*=f(*x*) i *x*=φ(*y*) są wówczas równoważne. Wynikają stąd dwa ważne wzory:

$$f\left(\phi\left(y\right)\right)=y \qquad \phi\left(f\left(x\right)\right)=x$$

Wykres funkcji odwrotnej *y*=φ(*x*) otrzymujemy przez odbicie zwierciadlane krzywej *y*=f(*x*) wzgledem prostej *y*=*x*.



Funkcja *y*=f(*x*)=e^x jest równoważna funkcji *x*=φ(*y*)=ln *y*. Prawdziwe są bowiem tożsamości $e^{\ln y}$ = *y*, ln e^x=*x*.

$$y=f\left(x\right)=e^{x} \qquad y=\phi\left(x\right)=\ln x$$

$$y=f\left(x\right)=x^{2} \qquad y=\phi\left(x\right)=\sqrt{x}$$

na podstawie Kompendium Matematyki PWN

Stosowanie granicy ilorazu różnicowego do obliczania pochodnych funkcji może sprawiać trudności. W związku z tym obliczono pochodne funkcji elementarnych i podano odpowiednie wzory dla najczęściej używanych funkcji. Przyjrzyjmy się jednak wyznaczaniu pochodnej z definicji w przypadku f(x)=e^x^.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x}(e^{h}-1)}{h}=e^{x}\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}$$

Zwróć uwagę na użycie symbolu h zamiast dx. Robimy to dla wygody i przejrzystości.
Teraz wprowadź zmienną $y=e^{h}-1$

$$y=e^{h}-1 \quad\Rightarrow\quad 1+y=e^{h} \quad\Rightarrow\quad \log_e(1+y)=\log_e e^{h}=h$$

$$\lim_{h\to 0} e^{h}=e^{0}=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to 0} e^{h}-1=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to 0} y=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_e(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\log_e(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_e(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_e\left(\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)}=\frac{1}{\log_e e}=1$$

$$f'(x)=(e^{x})'=e^{x}\frac{1}{\ln e}=e^{x}$$

Całkowanie przez części

$$\int u \cdot v' dt = uv - \int u' \cdot v \, dt$$

Przykład

$$\int t \cdot \exp(at) dt$$

$$\left(\exp(at)\right)' = a \exp(at) \;\Rightarrow\; \exp(at) = \left(\frac{1}{a}\exp(at)\right)'$$

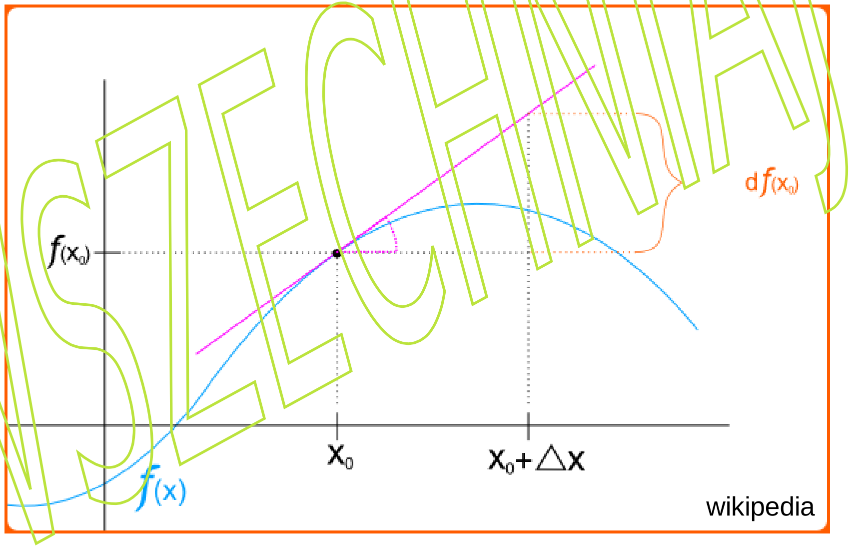
$$\int t \cdot \exp(at) dt = \int t \left(\frac{1}{a}\exp(at)\right)' dt = \frac{t}{a}\exp(at) - \int \left(\frac{1}{a}\exp(at)\right) dt = \frac{t}{a}\exp(at) - \frac{1}{a^2}\exp(at)$$

zatem

$$\int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = \left[\frac{t}{-\lambda}\exp(-\lambda t) - \frac{1}{\lambda^2}\exp(-\lambda t)\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda^2}$$

Różniczka funkcji:
W rachunku różniczkowym reprezentuje główną część zmiany funkcji f(x) w odniesieniu do zmian zmiennej niezależnej. Dla naszej funkcji F_1 napiszemy

$$dF_1 = \left(\frac{dF_1}{dx}\right) dx \equiv \frac{dF_1}{dx} dx$$



przykład

$$F_1 = x^2; \qquad dF_1 = 2x\,dx$$

a dla funkcji dwóch zmiennych F_2 różniczkę zapiszemy jako

$$dF_2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_x dy$$

przykład

$$F_2 = x^2 \cdot y^2; \qquad dF_2 = 2x \cdot y^2 dx + 2y \cdot x^2 dy$$

Od pochodnej do całki $\frac{dF}{dx} \equiv F'(x) \qquad dF = F'(x)dx$

$$\int dF = \int F'(x)dx \qquad F = \int F'(x)dx$$

Różniczkowanie przestaje być trywialne, gdy funkcje są nieliniowe. Przykładem prostej funkcji nieliniowej jest y=x². Funkcja liniowa: y = ax + b; funkcja kwadratowa: y = ax² + bx +c;

Pochodne funkcji złożonych

$$y=u(v(x)); \qquad \frac{dy}{dx}=u'(v)v'(x)=\frac{du}{v}\frac{dv}{dx};$$

Przykład: $y=e^{ax}\equiv e^{v}\equiv u(v); \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{d\,e^{v}}{dv}\frac{d\,ax}{dx}=e^{v}a=a\,e^{ax}$

$$\frac{d\,e^{ax}}{dx}=a\cdot e^{ax} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}d\,e^{ax}=e^{ax}dx \quad \Rightarrow \quad \int\left(\frac{1}{a}d\,e^{ax}\right)=\int e^{ax}dx \quad \Rightarrow \quad \int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}$$

Pochodne sumy i iloczynu funkcji

$$\left(F(x)+G(x)\right)'=F'(x)+G'(x); \qquad \left(F(x)\cdot G(x)\right)'=F'(x)\cdot G(x)+F(x)\cdot G'(x);$$

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha; \quad i=\sqrt{-1}; \quad \frac{d\,e^{i\alpha x}}{dx}=i\,\alpha\cdot e^{i\alpha x}$$

SPOSOBY PRZEDSTAWIENIA LICZBY ZESPOLONEJ:

Algebraiczna: $$z = a + i\,b \qquad \Re(z) = a; \qquad \Im(z) = b$$

Geometryczna interpretacja liczby zespolonej:

- **punkt o współrzędnych (a, b) na płaszczyźnie (zespolonej);**
- **wektor o takich współrzędnych układzie kartezjańskim;**
- **wektor w dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej;**

Trygonometryczna:

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Wykładnicza (wzór Eulera):

$$z = |z|\,e^{i\phi} \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Oznaczenia:

Zmieniając ϕ (argument liczby z) o wielokrotność 2π dostajemy tę samą liczbę zespoloną!

Wzór Eulera i pochodne funkcji trygonometrycznych:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi; \qquad \frac{d\,e^{i\phi}}{d\phi} = i\,e^{i\phi} = i(\cos\phi + i\sin\phi) = -\sin\phi + i\cos\phi$$

$$\left(e^{i\phi}\right)' = (\cos\phi + i\sin\phi)' = (\cos\phi)' + i(\sin\phi)' = -\sin\phi + i\cos\phi$$

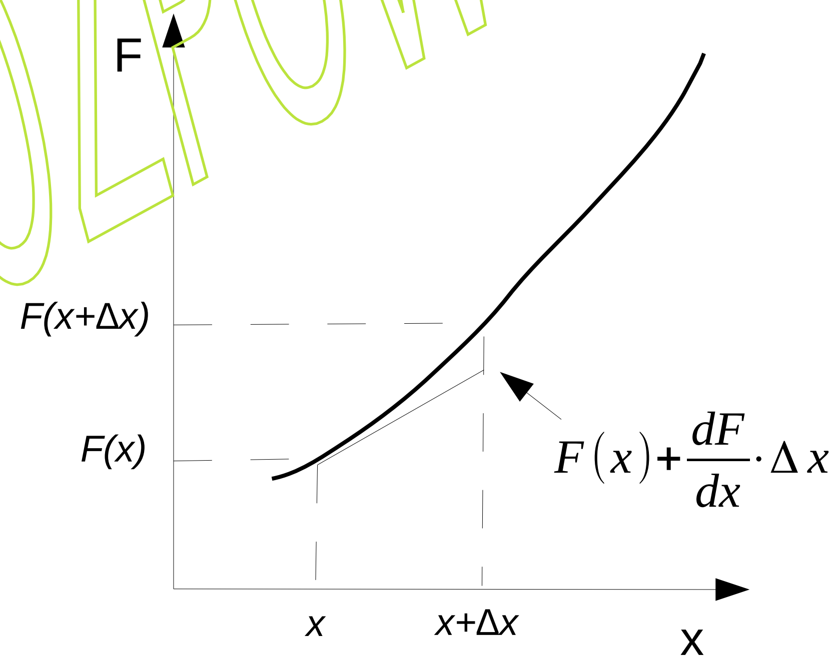
ostatnie przekształcenie na podstawie Tabeli ze slajdu 12.

wyższe pochodne

$$\frac{dF}{dx} \equiv F'(x); \qquad \frac{dF'}{dx} = \frac{d^2F}{dx^2} \equiv F''(x); \qquad \cdots$$

jednowymiarowy szereg Taylora jest rozwinięciem funkcji rzeczywistej f(x) względem punktu x=a, który jest dany przez

$$F(x) = F(a) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=a}(x-a) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x=a}(x-a)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3F}{dx^3}\right)_{x=a}(x-a)^3 + \cdots$$



Równaniem różniczkowym nazywamy równanie, w którym obok zmiennych niezależnych i niewiadomych funkcji zmiennych niezależnych występują również pochodne funkcji względem tych zmiennych. Rząd równania różniczkowego jest równy największemu rzędowi występujących w nim pochodnych.

Jeśli w równaniu różniczkowym występuje tylko jedna zmienna niezależna, wtedy wszystkie pochodne są pochodnymi zwyczajnymi i równanie nazywa się zwyczajnym równaniem różniczkowym.

Jeśli równanie różniczkowe zawiera więcej niż jedną zmienną niezależną i pojawiają się w nim pochodne względem tych zmiennych, to równanie nazywa się cząstkowym równaniem różniczkowym. Ważne przykłady to:

Równanie dyfuzji (ciepła)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u;$$

Równanie Naviera-Stokesa

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + \vec{f}$$

Równanie Laplace'a

$$\Delta u = 0;$$

Równanie Poissona

$$\Delta u = f(x, y, z);$$

Równanie falowe

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u;$$

Równanie Schrödingera

$$\frac{i h}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8 \pi^2 m} \Delta \psi + U(x, y, z) \psi$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right);$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla;$$

Liniowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach i układy takich równań.

$$\frac{d\,y_1}{dt} = a_{11}y_1(t)+a_{12}y_2(t)+a_{13}y_3(t)+f_1(t)$$

$$\frac{d\,y_2}{dt} = a_{21}y_1(t)+a_{22}y_2(t)+a_{23}y_2(t)+f_2(t)$$

$$\frac{d\,y_3}{dt} = a_{31}y_1(t)+a_{32}y_2(t)+a_{33}y_3(t)+f_3(t)$$

Bardziej zwięzły zapis:

$$\frac{d\,y_1}{dt} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}y_k(t)+f_1(t)$$

$$\frac{d\,y_2}{dt} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k}y_k(t)+f_2(t)$$

$$\frac{d\,y_3}{dt} = \sum_{k=1}^{3} a_{3k}y_k(t)+f_3(t)$$

Układ równań jednorodnych: wszystkie $f_i(t)$ są równe zeru. Istnieje standardowa metoda znajdowania jego rozwiązań (metoda Eulera).

Odpowiadający układowi liniowemu niejednorodnemu układ liniowy jednorodny

$$\frac{d\,y_1}{dt} = a_{11}\,y_1(t)+a_{12}\,y_2(t)+a_{13}\,y_3(t)$$

$$\frac{d\,y_2}{dt} = a_{21}\,y_1(t)+a_{22}\,y_2(t)+a_{23}\,y_2(t)$$

$$\frac{d\,y_3}{dt} = a_{31}\,y_1(t)+a_{32}\,y_2(t)+a_{33}\,y_3(t)$$

ma układ fundamentalny rozwiązań, złożony z funkcji elementarnych. Podstawową metodą budowania układu fundamentalnego rozwiązań jest metoda Eulera.

Zgodnie z metodą Eulera, rozwiązania układu jednorodnych równań liniowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach poszukuje się w postaci

$$y_1=\gamma_1 e^{\lambda t};\quad y_2=\gamma_2 e^{\lambda t};\quad y_3=\gamma_3 e^{\lambda t};$$

Wstawiamy propozycję rozwiązań do układu

$$\frac{d\,\gamma_1 e^{\lambda t}}{dt} = \lambda\,\gamma_1 e^{\lambda t} = a_{11}\,\gamma_1 e^{\lambda t}+a_{12}\,\gamma_2 e^{\lambda t}+a_{13}\,\gamma_3 e^{\lambda t}$$

$$\frac{d\,\gamma_2 e^{\lambda t}}{dt} = \lambda\,\gamma_2 e^{\lambda t} = a_{21}\,\gamma_1 e^{\lambda t}+a_{22}\,\gamma_2 e^{\lambda t}+a_{23}\,\gamma_3 e^{\lambda t}$$

$$\frac{d\,\gamma_3 e^{\lambda t}}{dt} = \lambda\,\gamma_3 e^{\lambda t} = a_{31}\,\gamma_1 e^{\lambda t}+a_{32}\,\gamma_2 e^{\lambda t}+a_{33}\,\gamma_3 e^{\lambda t}$$

i dzielimy stronami wynikające z tego równania przez $e^{\lambda t}$.

Otrzymujemy układ algebraicznych równań na amplitudy γ_i:

$$(a_{11}-\lambda)\gamma_1+a_{12}\gamma_2+a_{13}\gamma_3=0$$
$$a_{21}\gamma_1+(a_{22}-\lambda)\gamma_2+a_{23}\gamma_3=0$$
$$a_{31}\gamma_1+a_{32}\gamma_2+(a_{33}-\lambda)\gamma_3=0$$

$$\begin{bmatrix}(a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Aby ten układ miał niezerowe rozwiązanie, warunkiem koniecznym i wystarczającym jest, aby jego wyznacznik był równy zeru.

$$\begin{vmatrix}(a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda)\end{vmatrix}=0$$

Wyznacznik ten nazywa się równaniem charakterystycznym. W tym przypadku jest to równanie trzeciego stopnia względem λ.

$$W=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{11}-\lambda)a_{23}a_{32}-(a_{33}-\lambda)a_{12}a_{21}-(a_{22}-\lambda)a_{13}a_{31}=0$$

Mamy trzy pierwiastki równania trzeciego stopnia, rzeczywiste lub zespolone.
Każdemu jego pierwiastkowi λ_i odpowiada rozwiązanie dla każdej funkcji y_j postaci $y_{j,i}=\gamma_{j,i}e^{\lambda_i t}$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}' \equiv
\begin{array}{rcl}
\dfrac{d\,y_1}{dt} & = & a_{11}\,y_1(t)+a_{12}\,y_2(t)+a_{13}\,y_3(t)+f_1(t) \\
\dfrac{d\,y_2}{dt} & = & a_{21}\,y_1(t)+a_{22}\,y_2(t)+a_{23}\,y_2(t)+f_2(t) \\
\dfrac{d\,y_3}{dt} & = & a_{31}\,y_1(t)+a_{32}\,y_2(t)+a_{33}\,y_3(t)+f_3(t)
\end{array}
\equiv
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}' =
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}
$$

Dla trzech wartości λ_i , i=1,2,3, mamy trzy rozwiązania równania jednorodnego, Y_1, Y_2 i Y_3. Nazywa się je fundamentalnymi.

$$
Y_1 = \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \\ y_{3,1} \end{bmatrix};\quad
Y_2 = \begin{bmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \\ y_{3,2} \end{bmatrix};\quad
Y_3 = \begin{bmatrix} y_{1,3} \\ y_{2,3} \\ y_{3,3} \end{bmatrix}
\qquad
Y \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix};\quad
\hat{Y} \equiv \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{bmatrix};\quad
\hat{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};
$$

Jeśli Y_1, Y_2 oraz Y_3 stanowią układ fundamentalny rozwiązań jednorodnego ukladu liniowych równań różniczkowych, to również kombinacja liniowa $C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3$, gdzie C_1, C_2 oraz C_3 są dowolnymi stałymi, jest rozwiązaniem tego układu jednorodnego.

$$(Y_1)' = \hat{A}\,Y_1;\ \ (Y_2)' = \hat{A}\,Y_2;\ \ (Y_3)' = \hat{A}\,Y_3$$

$$(C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3)' = (C_1Y_1)' + (C_2Y_2)' + (C_3Y_3)' = C_1\hat{A}\,Y_1 + C_2\hat{A}\,Y_2 + C_3\hat{A}\,Y_3$$
$$= \hat{A}\,(C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3)$$

TWIERDZENIE: jeśli Y_1, Y_2 oraz Y_3 stanowią układ fundamentalny rozwiązań jednorodnego ukladu liniowych równań różniczkowych, a $Y^{(p)}$ jest dowolnym (choć na razie nieznanym) rozwiązaniem niejednorodnego układu równań, to dla każdego rozwiązania Y układu nielednorodnego istnieją jednoznacznie określone stałe C_1, C_2 oraz C_3, takie że:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 + Y^{(p)}$$

Zakładamy teraz, że wielkości C_i to nie stałe lecz że są zależne od t (metoda uzmienniania stałych). To otwiera drogę do wyznaczenia rozwiązania $Y^{(p)}$. Szukamy go w postaci:

$$Y^{(p)} = C_1(t)Y_1 + C_2(t)Y_2 + C_3(t)Y_3 = C_1(t)\cdot\begin{bmatrix} y_{1,1} \\ y_{2,1} \\ y_{3,1} \end{bmatrix} + C_2(t)\cdot\begin{bmatrix} y_{1,2} \\ y_{2,2} \\ y_{3,2} \end{bmatrix} + C_3(t)\cdot\begin{bmatrix} y_{1,3} \\ y_{2,3} \\ y_{3,3} \end{bmatrix}$$

Pamiętajmy, że y_{ij} są funkcjami t.

$$\hat{Y}^{(p)}=\begin{bmatrix} C_1(t)y_{11} & C_2(t)y_{12} & C_3(t)y_{13} \\ C_1(t)y_{21} & C_2(t)y_{22} & C_3(t)y_{23} \\ C_1(t)y_{31} & C_2(t)y_{32} & C_3(t)y_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_{1,1}(t) & y_{1,2}(t) & y_{1,3}(t) \\ y_{2,1}(t) & y_{2,2}(t) & y_{2,3}(t) \\ y_{3,1}(t) & y_{3,2}(t) & y_{3,3}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{bmatrix}\equiv\hat{Y}(t)U(t)$$

Dodajmy oznaczenie

$$U(t)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{bmatrix} \qquad \left(\hat{Y}^{(p)}\right)'=\left(\hat{Y}(t)U(t)\right)'=\left(\hat{Y}(t)\right)'U(t)+\hat{Y}(t)\left(U(t)\right)' \qquad F\equiv\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

Podstawiamy proponowane rozwiązanie do niejednorodnegu układu naszych równań

$$\left(\hat{Y}(t)\right)'U(t)+\hat{Y}(t)\left(U(t)\right)'=\hat{A}\,\hat{Y}(t)U(t)+F(t)$$

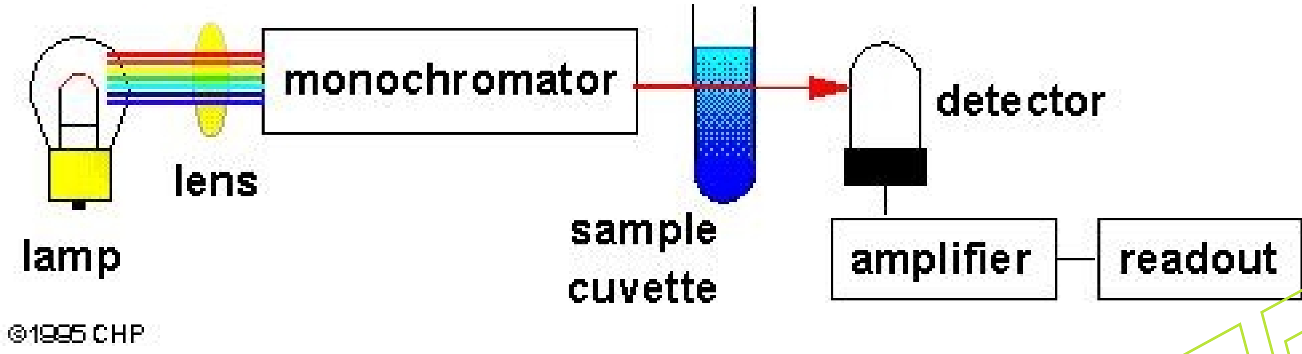
Ponieważ:

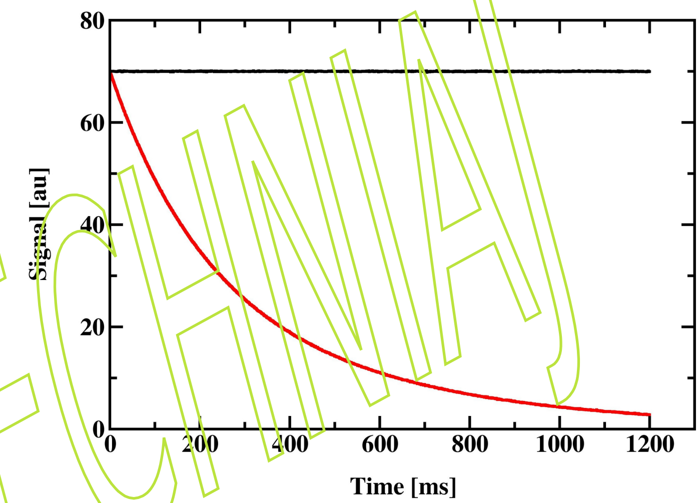
$$\left(\hat{Y}(t)\right)'U(t)=\hat{A}\,\hat{Y}(t)U(t)$$

Zostaje do rozwiązania:

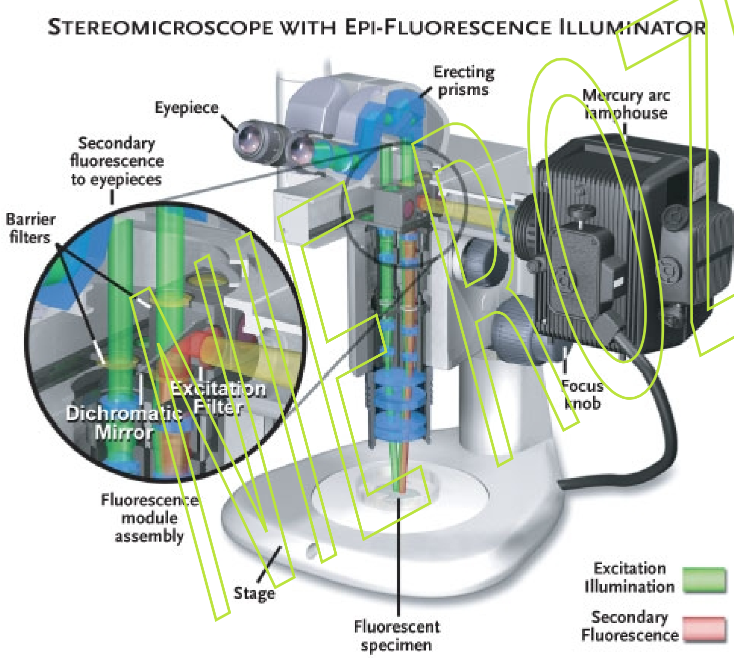
$$\hat{Y}(t)\left(U(t)\right)'=F(t)$$

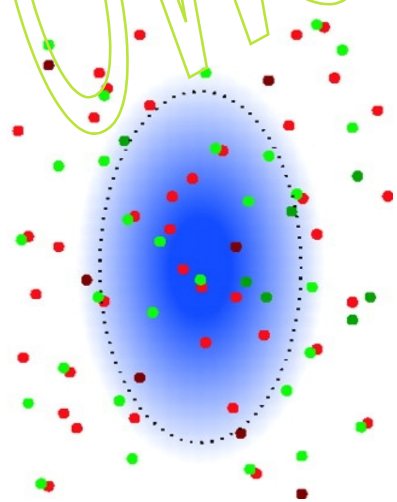
To są trzy zwykłe równania różniczkowe pierwszego rzędu na Ci(t). Tu nie mamy standardowych metod postępowania, ale zazwyczaj mamy do czynienia z całkami, które odnajdujemy w tabelach, takich jak ta pokazana na slajdzie 12.

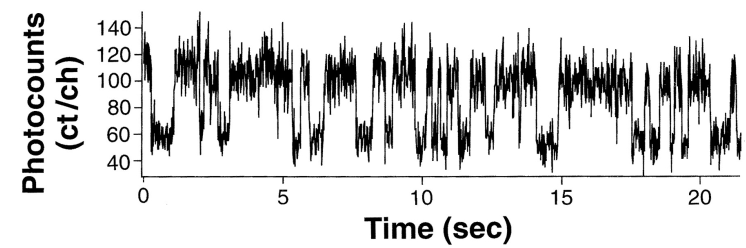


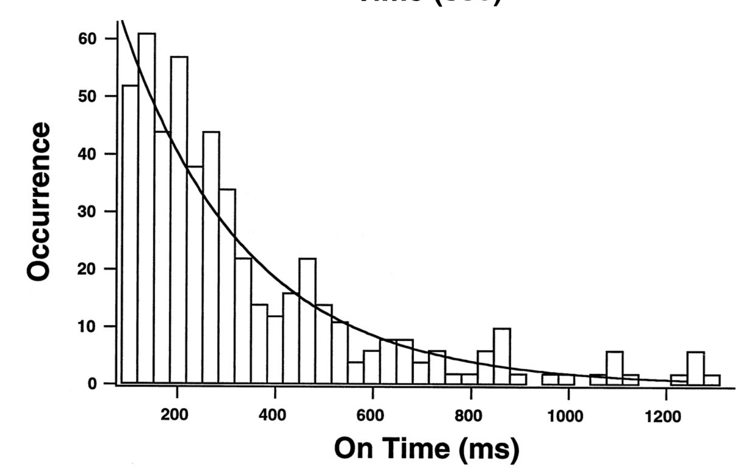


$$A + B \leftrightarrow C + D$$









http://www.ufrgs.br/imunovet/molecular_immunology/microscopy.html; http://royalsocietypublishing.org/content/6/Suppl_1/S15