

## Zadania domowe - grawitacja i prawa Keplera

**Zadanie 1.** Pewna osoba, stojąc na Ziemi (promień  $R = 6370$  km, średnia gęstość  $\rho = 5.5$  g/cm<sup>3</sup>) podskoczyła pionowo na wysokość  $H = 0.7$  m. Na jaką wysokość podskoczyłaby ta osoba stojąc na planetoidzie o promieniu  $r$  i gęstości  $\rho$ , jeśli wykorzysta taką samą siłę mięśni? Jaki musi być promień planetoidy, aby skok zakończył się oddaleniem od planetoidy na nieskończoną odległość? Ile wynosi pierwsza i druga prędkość kosmiczna na tej planetoidzie?

**Zadanie 2.** Rozpatrzmy układ, złożony ze słońca (masa  $M = 2 \times 10^{30}$  kg) i planetoidy (masa  $m = 6 \times 10^{24}$  kg), o zerowym momencie pędu. W chwili początkowej planetoida znajduje się od słońca w odległości  $R = 1.5 \times 10^8$  km tak dużej, że jej prędkość możemy uznać za równą zeru. Jak długo planetoida będzie spadać na słońce?

**Zadanie 3.** Znaleźć potencjał grawitacyjny w środku kwadratu o boku  $a = 1$  m, w którego każdym wierzchołku znajduje się masa  $m = 1$  kg. Jaką pracę musi wykonać siła zewnętrzna, aby przesunąć jedną z mas do środka kwadratu (zaniedbujemy energię kinetyczną ruchu)?

**Zadanie 4.** Siła zewnętrzna przesuwa masę  $m$  w polu siły grawitacyjnej planety o masie  $M$  i promieniu  $R$  ze stałą prędkością. Jaką pracę wykona ta siła, jeśli odległość masy  $m$  od środka planety zwiększyła się z  $nR$  do  $(n + 1)R$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną większą niż 1?

**Zadanie 5.** Wokół planety o promieniu  $R$  i masie  $M$  krąży okrągły pierścień (o promieniu  $r$ ) meteorów, którego rozkład masy można przybliżyć rozkładem liniowym o gęstości  $\rho$ . Jaka jest energia grawitacyjna oddziaływania pierścienia z planetą? Zadanie należy rozwiązać dwoma metodami: a) bezpośrednio obliczając energię oddziaływania oraz b) obliczając pracę potrzebną do przeniesienia planety z nieskończoności do położenia końcowego. Czy układ ten jest stabilny mechanicznie? Tzn., co by się stało, gdyby planeta została wytrącona z położenia równowagi? Rozważ przesunięcia w płaszczyźnie pierścienia oraz wzdłuż osi symetrii prostopadłej do pierścienia.

**Zadanie 6.** Wykazać, że siła działająca na masę  $m$  umieszczoną w dowolnym miejscu wewnątrz pustej, jednorodnej powłoki sferycznej o masie  $M$  jest równa zero. Jaki jest potencjał grawitacyjny wewnątrz takiej powłoki (zakładając, że jest on równy zero w nieskończoności)?

**Zadanie 7.** Korzystając z wyniku poprzedniego zadania podać zależność potencjału grawitacyjnego od odległości  $r$  od środka kuli o masie  $M$  i promieniu  $R$  w zakresie  $0 \leq r < \infty$ .