**Seria III**
**Zadań domowych z MMF dla NKF do wykładu prof. K. Napiórkowskiego**

**Zadanie 1.** (4pkt.) W całce potrójnej (po całej przestrzeni) z dowolnej funkcji $f(x,y,z)$ dokonać zamiany zmiennych kartezjańskich na sferyczne, zgodnie z regułą:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz f(x,y,z) = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| f\Big(x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)\Big),$$

w której występuje wartość bezwzględna jakobianu, czyli wyznacznika macierzy pochodnych starych współrzędnych po nowych:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

Współrzędne sferyczne wygodnie jest zdefiniować wzorami:

$$x = r\ sin\theta\ cos\varphi,$$
$$y = r\ sin\theta\ sin\varphi,$$
$$z = r\ cos\theta,$$

przy czym zakres zmienności tych współrzędnych jest taki jak w wypisanej powyżej całce.

Podać interpretację geometryczną uzyskanego wyniku, polegającą na obliczeniu objętości *infinitezymalnego* sześcianu $S$, określonego następująco:

$$S = \Big\{ \big(x', y', z'\big) : \ r' \in \big[r, r+dr\big] \ \ i \ \ \theta' \in \big[\theta, \theta + d\theta\big] \ \ i \ \ \varphi' \in \big[\varphi, \varphi + d\varphi\big] \Big\},$$

gdzie $(r', \theta', \varphi')$ to współrzędne sferyczne punktu $(x', y', z')$.

Uzyskaną metodę zastosować do sprowadzenia całki potrójnej (po całej przestrzeni) z funkcji sferycznie symetrycznej $(f(x,y,z) = g(r))$ do całki pojedyńczej po zmiennej $r$. Jako przypadek szczególny obliczyć następującą całkę:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz\ \ e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = ?$$

**Zadanie 2.** (4pkt.) Wiedząc, że laplasjan we współrzędnych kartezjańskich ma następującą postać:

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

obliczyć radialną część laplasjanu $\triangle_r$, tzn. tą część laplasjanu, która we współrzędnych sferycznych zależy tylko od zmiennej radialnej $r$.

*Wskazówki:* Najwygodniej jest podziałać laplasjanem na funkcję sferycznie symetryczną $g(r)$ i wykorzystać fakt:

$$\triangle\ g(r) = \triangle_r\ g(r).$$

Reguły różniczkowania związane z zamianą zmiennych prowadzą przykładowo do wzoru:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

**Zadanie 3.** (5pkt.) W mechanice relatywistycznej zasada najmniejszego działania Hamiltona dla cząstki swobodnej o niezerowej masie $m$ przyjmuje następującą postać:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[ -m\sqrt{1 - x'^2(t)} \Big]\, dt = 0,$$

przy czym prędkość światła została tu przyjęta jako jedność. Napisać równania Eulera-Lagrange'a i rozwiązać je. Posługując się twierdzeniem Noether znaleźć dwie całki pierwsze (prawa zachowania) związane z niezależnością lagranżjanu od $t$ i $x$. Podać interpretacje znalezionych stałych ruchu oraz związek określający ich wzajemną zależność.

**Zadanie 4.** (7pkt.) Wykazać, że w mechanice relatywistycznej działanie cząstki swobodnej (patrz zadanie 3) jest niezmiennicze względem (czynnej) transformacji Lorentza:

$$\tilde{x} = \frac{x - at}{\sqrt{1 - a^2}} \quad , \quad \tilde{t} = \frac{t - ax}{\sqrt{1 - a^2}},$$

gdzie parametr $a$ pełni rolę prędkości „pchnięcia". Na mocy twierdzenia Noether podać odpowiadające rozważanej transformacji prawo zachowania. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzić, że uzyskana wielkość jest rzeczywiście stała. Podać interpretację i nazwę tej stałej ruchu (rozważ pojęcie energii i momentu pędu). Czy uzyskana stała ruchu jest zależna od stałych uzyskanych w zadaniu 3?
*Wskazówka:* Aby wykazać niezmienniczość działania wystarczy w tym przypadku wykazać niezmienniczość jego rózniczki $Ldt$.

*Rozwiązania zadań należy oddać na ćwiczeniach 18 listopada.*

Grzegorz Koczan