Seria II
Zadań domowych z MMF dla NKF do wykładu prof. K. Napiórkowskiego

Zadanie 1. Podjąć próbę znalezienia funkcji falowej stanu podstawowego (tzn. stanu o najmniejszej energii) kwantowego oscylatora harmonicznego, wiedząc, że wartość (średnia) energii zadana jest funkcjonałem:

$$E\big[\Psi(.)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x)\Big(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2\Big)\Psi(x)\,dx.$$

Ograniczyć się do funkcji rzeczywistych ($\Psi^* = \Psi$), a rozwiązań równania Eulera-Lagrange'a poszukiwać w postaci szeregu:

$$\Psi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots,$$

którego współczynniki należy wyliczyć. Dokonać analizy uzyskanych dwóch liniowo niezależnych rozwiazań, która doprowadzi do odpowiedzi na poniższe pytania:

1. Czy znalezione rozwiązania spełniają stacjonarne równanie Schrödingera:

   $$\Big(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2\Big)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

   oraz ewentualnie jaka odpowiada im wartość energii E.

2. Czy znalezione rozwiązania spełniają wymagane założenia zarówno fizyczne, jak i matematyczne. Aby odpowiedzieć na to pytanie należy sprawdzić zbieżność znalezionych szeregów dla dowolnego x oraz to czy szeregi te określają funkcje całkowalne z kwadratem czy też nie (normalizacja prawdopodobieństwa). W celu ustalenia tego ostatniego wystarczy obliczyć granicę znalezionych rozwiązań w nieskończoności.

3. Czy jakakolwiek kombinacja liniowa uzyskanych rozwiązań może być prawidłowym stanem podstawowym oscylatora harmonicznego.

Zadanie 2. Znaleźć stan podstawowy kwantowego oscylatora harmonicznego (patrz zadanie 1) uwzględniając warunek normalizacyjny:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x)\Psi(x)\,dx.$$

Ograniczyć się do funkcji rzeczywistych, a rozwiązania głównego poszukiwać w postaci:

$$\psi_0(x) = C\,e^{ax+b},$$

gdzie a, b, C to stałe do wyznaczenia. Sprawdzić, że równanie Eulera-Lagrange'a spełniają także następujące funkcję:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}\Big(x - \frac{d}{dx}\Big)\Psi_0(x), \quad \Psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}}\Big(x - \frac{d}{dx}\Big)\Psi_1(x), \quad \dots.$$

Ponadto odpowiedzieć na następujące pytania:

1. Czy funkcje $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ spełniają równanie Schrödingera i ewentualnie jakim wartościom energii E odpowiadają?

2. Która z funkcji $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ jest ekstremalą zagadnienia wariacyjnego, a która opisuje stan podstawowy oscylatora?

Zadania należy oddać na ćwiczeniach 4 listopada.

Grzegorz Koczan