**Seria I**
**Zadań domowych z MMF dla NKF**

**Zadanie 1.** Obliczyć długość kawałka krzywej określonego dla $x \in [1, 5\sqrt{2}]$ równaniem funkcyjnym:

$$y(x) = arcch\, x.$$

Funkcja $arcch(.)$ jest odwrotnością cosinusa hiperbolicznego:

$$ch(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

rozpatrywanego tutaj dla nieujemnych $y$.

**Zadanie 2.** Na podstawie zasady Fermata:

$$\delta \int_\gamma n(x,y)\, ds = 0,$$

gdzie $n$ jest bezwględnym współczynnikiem załamania, a $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ różniczką długości krzywej $\gamma$, wykazać prostoliniowy bieg promieni światła w ośrodku jednorodnym i izotropowym ($n = const$). W tym celu należy napisać równanie Eulera-Lagrange'a oraz rozwiązać je.

**Zadanie 3.** Kierując się zasadą Fermata wykazać, stosując jedynie rachunek różniczkowy, prawo odbicia ($\alpha = \beta$) i załamania ($n_1 sin\, \alpha = n_2 \sin\beta$). Za zmienną można przyjąć odległość $x$ (patrz rysunki).

**Zadanie 4.** Wykorzystując zasadę najmniejszego działania (Hamiltona) dla oscylatora harmonicznego:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2}x'^2(t) - \frac{1}{2}x^2\right] dt = 0,$$

napisać równanie Eulera-Lagrange'a oraz podać jego rozwiązanie spełniające warunki:

$$x(t_1 = 0) = 0 \quad , \quad x(t_2 = 2\pi) = 1.$$

*Zadania należy oddać na ćwiczeniach 28 października.*

Grzegorz Koczan