

Zadanie 1. Znajdź rząd następujących macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Rozwiąż metodą macierzy rozszerzonej następujące układy równań:

$$a) \begin{cases} 5x + 2y - 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}, b) \begin{cases} x - 2y + z - t = -4 \\ 2x - y - z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 5 \\ x + y - z + t = 4 \end{cases}, c) \begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ 2x - 4y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}.$$

Zwróć uwagę na to, że układ trzeci nie jest układem Cramera.

Zadanie 3. Przy pomocy macierzy rozszerzonej oblicz następujące odwrotności macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}, b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}, c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Zadanie 4. Oblicz wskazanymi metodami wyznaczniki macierzy z zadania 3 (branych bez potęgi -1). Wyznacznik pierwszej macierzy oblicz wprost z definicji, a wynik sprawdź korzystając ze schematu Sarrusa. Dla macierzy b) zastosuj rozwinięcie Laplace'a. Ostatni wyznacznik oblicz wykonując dozwolone operacje na macierzy.

Zadanie 5. W przestrzeni \mathbb{R}^3 rozważmy dwie bazy f i g zdefiniowane następująco:

$$f_1 = (0, 1, 1); f_2 = (1, 0, 1); f_3 = (1, 1, 0); \quad g_1 = (1, 0, 0); g_2 = (1, 1, 0); g_3 = (1, 1, 1).$$

Znajdź macierz przejścia z bazy f do bazy g , czyli macierz $[id]_g^f$ odwzorowania identyczności w tych bazach.

Ponadto znajdź macierz $[A]_g^f$ następującego endomorfizmu przestrzeni \mathbb{R}^3 :

$$A(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x).$$

Zadanie 6. Znajdź wektory i wartości własne następujących macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}, c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Rozwiąż układy równań $a), b)$ z zadania 2 wykorzystując wzory Cramera.

Zadanie 8. Wykonaj przykłady $a), b)$ z zadania 3 stosując, poznany na wykładzie, wzór wyznacznikowy na macierz odwrotną. Czy warto tą metodą obliczać przykład $c)$?

W imieniu całego zespołu dydaktycznego życzę Wesółych Świąt Wielkanocnych.