

II SERIA ZADAŃ Z MATEMATYKI II NKF

Zadanie 1. Znajdź przedział zbieżności następującego szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7x - 15)^n}{n!}.$$

Zadanie 2. Niech \mathcal{A} będzie zbiorem macierzy diagonalnych 4×4 o elementach ze zbioru liczb rzeczywistych. W zbiorze \mathcal{A} wprowadzamy działania dodawania elementów zbioru i mnożenia ich przez liczbę rzeczywistą:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 + b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 + b_4 \end{pmatrix},$$

$$c \cdot A = c \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ca_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ca_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ca_4 \end{pmatrix} \quad \text{gdzie } A, B \in \mathcal{A} \text{ i } c \in \mathbb{R}.$$

- a) Udowodnij, że \mathcal{A} jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych \mathbb{R} .
- b) Zaproponuj bazę tej przestrzeni.
- c) Podaj wymiar przestrzeni \mathcal{A} .

Zadanie 3. Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad \mathbb{R} . Rozważmy pewne odwzorowanie liniowe $F : V \rightarrow W$. Niech $U \subset V$ będzie zbiorem wszystkich wektorów \vec{v} z V , dla których $F(\vec{v}) = 0$. Pokaż, że U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V .

Zadanie 4. Oblicz następujące potęgi liczb zespolonych:

$$a) \left(i \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{18}, \quad b) \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i^2} \right)^{1605}, \quad c) \left(\frac{1 + i}{i - \sqrt{3}} \right)^{2004},$$

Wyniki podaj w postaci algebraicznej.

Zadanie 5. Oblicz następujące pierwiastki zespolone:

$$a) (12 - 5i)^{\frac{1}{2}}, \quad b) \sqrt[4]{-16}, \quad c) \sqrt[6]{1 + \sqrt{3}i}.$$

Wyniki podaj w postaci algebraicznej i zaznacz je na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie 6. Znajdź wszystkie zespolone pierwiastki poniższych równań:

$$a) x^2 + (2i - 2)x - 5 - 14i = 0, \quad b) x^4 - 6x^2 + 25 = 0.$$

Rozwiązania podaj w postaci algebraicznej.

Zadanie 7. Stosując proste podstawienie sprowadź następujące równania trzeciego stopnia:

$$a) x^3 + 3x^2 + 9x - 11 = 0, \quad b) x^3 + 6x^2 + 9x - 1 = 0$$

do postaci zredukowanej, a następnie rozwiąż je metodą Cardano.