II KOLOKWIUM Z MATEMATYKI II NKF 04.05.2004

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnych podpisanych kartkach!

Zadanie 1. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dana jest baza f:

$$f_1 = (1,0,0); \quad f_2 = (0,2,0); \quad f_3 = (0,0,3);$$

zaś w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ baza g:

$$g_1 = (1,2,0,0); \quad g_2 = (0,0,1,2); \quad g_3 = (1,2,3,4); \quad g_4 = (4,3,2,1).$$

Niech $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym zdefiniowanym następująco:

$$A(x,y,z,t) = (x + 2y - t, 2x + 4y - 3z + t, z + t).$$

Podaj macierz $[A]_e^{e'}$ odwzorowania A, określoną w bazach standardowych oraz macierz $[A]_g^f$, określoną w bazach g i f.

Zadanie 2. Wykorzystując funkcję wyznacznik wykaż, że układ wektorów g, z poprzedniego zadania, jest rzeczywiście bazą $\mathbb{R}^4$. Następnie oblicz wyznacznik następującego endomorfizmu $\mathbb{R}^5$:

$$E(x,y,z,u,v) = (x + 2y, y + 2z, z + 2u, u + 2v, 2x + v).$$

Zadanie 3. Oblicz odwrotności macierzowe:

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}, \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & x+2 \end{bmatrix}^{-1}, \text{ gdzie } x \neq 0, -1.$$

W każdym przykładzie zastosuj inną metodę!

Zadanie 4. Rozwiąż następujący układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 5w &= 0 \\ 2x + y - 4z - w &= 1 \\ x + y + z + w &= 0 \\ -x - y - z + w &= 4 \end{cases}.$$

Zdanie 5. Oblicz rząd poniższej macierzy:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. a) Sprawdź, czy poniższa formuła spełnia warunki iloczynu skalarnego w przestrzeni wielomianów rzeczywistych:

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} xP(x)Q(x)dx, \quad \text{gdzie} \quad P, Q \in R_\infty[x].$$

b) Pokaż, że w każdej przestrzeni wektorowej z określonym iloczynem skalarnym, dowolna para wektorów prostopadłych v, w spełnia związek:

$$||v||^2 + ||w||^2 = ||v + w||^2.$$

Ewa Saczuk & Grzegorz Koczan