DRUGI TERMIN I KOLOKWIUM Z MATEMATYKI II NKF 06.04.2004

Każde zadanie proszę rozwiązywać na osobnych i podpisanych kartkach!

Zadanie 1. Znajdź największe podzbiory liczb rzeczywistych (a dla chętnych zespolonych), w których zbieżne są następujące szeregi:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}\, x^n, \quad c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{3^n}, \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n^3}(x+2)^n.$$

Zwróć szczególną uwagę na punkty, dla których kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego nie roztrzygają zbieżności rozważanych szeregów.

Zadanie 2. Niech $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią wektorową dwuwymiarowych macierzy rzeczywistych. Rozważmy pewien maksymalny podzbiór $K \subset V$ macierzy komutujących. Mówimy, że macierze komutują w zbiorze K, jeżeli iloczyn dowolnych dwóch macierzy z tego zbioru jest przemienny. Maksymalność zbioru K oznacza, że nie istnieje macierz spoza tego zbioru, która komutowałaby ze wszystkimi macierzami zbioru K. Zatem warunki kumutacji elementów oraz maksymalności zbioru K można wyrazić następująco:

$$\bigwedge_{\mathbb{A},\mathbb{B}\in K} \mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A}, \qquad \bigwedge_{\mathbb{M}\notin K}\ \bigvee_{\mathbb{A}\in K} \mathbb{A}\cdot\mathbb{M} \neq \mathbb{M}\cdot\mathbb{A}.$$

Wykaż, że zbiór K jest podprzestrzenią wektorową.

Które z poniższych podprzestrzeni są przykładami zbioru typu K:

$$K_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \right\}_{a,b\in\mathbb{R}}, \ K_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \right\}_{a,b,c\in\mathbb{R}}, \ K_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \right\}_{a,b\in\mathbb{R}} ?$$

Zadanie 3. W przestrzeni wektorowej $V = R_2[x]$ wielomianów rzeczywistych drugiego stopnia definiujemy odwzorowanie $A : V \to V$, takie że:

$$(AQ)(x) \equiv Q'(x) + x^2 Q(0) \quad \text{dla} \quad Q \in V.$$

a) Wykaż, że A jest odwzorowaniem liniowym.

b) Podaj macierz $[A]^e_f$ tego odwzorowania w dowolnie wybranych bazach e, f.

c) Znajdź jądro $kerA$ i obraz imA tego odwzorowania oraz podaj ich wymiary.

d) Czy odwzorowanie A jest osobliwe? Jeśli A nie jest osobliwe to znajdź odwzorowanie odwrotne A^{-1}(można w tym celu wykorzystać macierz odwzorowania).

Zadanie 4. Oblicz następujące potęgi liczb zespolonych:

$$a)\ \left[\left(\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^{137}, \quad b)\ i^{2008}.$$

Wyniki podaj w maksymalnie uproszczonej postaci algebraicznej.

Zadanie 5. Znajdź wszystkie zespolone pierwiastki poniższych równań kwadratowych:

$$a)\ 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 3 = 0, \quad b)\ x^2 - (4+i)x + 4i = 0.$$

Rozwiązania podaj w maksymalnie uproszczonej postaci algebraicznej.

Zadanie*6. Metodą Cardana rozwiąż następujące równanie trzeciego stopnia:

$$x^3 + 2x + 1 = 0$$

Rozwiązania podaj w maksymalnie uproszczonej postaci algebraicznej.

Ewa Saczuk & Grzegorz Koczan

III SERIA ZADAŃ Z MATEMATYKI II NKF 06.04.2004

Zadanie 1. Znajdź rząd następujących macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \ b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Rozwiąż metodą macierzy rozszerzonej następujące układy równań:

$$a) \begin{cases} 5x + 2y - 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}, \ b) \begin{cases} x - 2y + z - t = -4 \\ 2x - y - z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 5 \\ x + y - z + t = 4 \end{cases}, \ c) \begin{cases} x - 2y - z = -1 \\ 2x - 4y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}.$$

Zwróć uwagę na to, że układ trzeci nie jest układem Cramera.

Zadanie 3. Przy pomocy macierzy rozszerzonej oblicz następujące odwrotności macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \ b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}, \ c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Zadanie 4. Oblicz wskazanymi metodami wyznaczniki macierzy z zadania 3 (branych bez potęgi -1). Wyznacznik pierwszej macierzy oblicz wprost z definicji, a wynik sprawdź korzystając ze schematu Sarrusa. Dla macierzy $b)$ zastosuj rozwinięcie Laplace'a. Ostatni wyznacznik oblicz wykonując dozwolone operacje na macierzy.

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważmy dwie bazy f i g zdefiniowane następująco:

$$f_1 = (0,1,1); f_2 = (1,0,1); f_3 = (1,1,0); \quad g_1 = (1,0,0); g_2 = (1,1,0); g_3 = (1,1,1).$$

Znajdź macierz przejścia z bazy f do bazy g, czyli macierz $[id]_g^f$ odwzorowania identyczności w tych bazach.
Ponadto znajdź macierz $[A]_g^f$ następującego endomorfizmu przestrzeni $\mathbb{R}^3$:

$$A(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x).$$

Zadanie 6. Znajdź wektory i wartości własne następujących macierzy:

$$a) \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \ b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}, \ c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Rozwiąż układy równań $a), b)$ z zadania 2 wykorzystując wzory Cramera.

Zadanie 8. Wykonaj przykłady $a), b)$ z zadania 3 stosując, poznany na wykładzie, wzór wyznacznikowy na macierz odwrotną. Czy warto tą metodą obliczać przykład $c)$?

W imieniu całego zespołu dydaktycznego życzę Wesołych Świąt Wielkanocnych .

Grzegorz Koczan