

Każde zadanie proszę rozwiązywać na oddzielnej, podpisanej kartce!

Zadanie 1.

Oblicz następujące pierwiastki zespolone:

$$a) \sqrt[6]{-1}, \quad b) \sqrt[4]{24i - 7}.$$

Wyniki zapisz w maksymalnie uproszczonej postaci algebraicznej i zaznacz je na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie 2.

Niech V będzie przestrzenią wielomianów zmiennej rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych, stopnia ≤ 4 . Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią wielomianów stopnia ≤ 3 . Rozważmy odwzorowanie liniowe $F : V \rightarrow W$ zadane równaniem:

$$F(u(x)) \equiv u'(x-1),$$

gdzie $u \in V$, zaś $u'(x-1)$ jest pochodną wielomianu $u(x-1)$. Wykaż liniowość odwzorowania F , a następnie podaj jego macierz przyjmując w przestrzeni V bazę $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, zaś w przestrzeni W pewną niestandardową bazę wybraną samodzielnie.

Zadanie 3.

Podaj wartości własne i odpowiadające im wektory własne następującej macierzy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ze znalezionych wektorów zbuduj ortonormalną bazę \mathbb{R}^3 , której elementy będą wektorami własnymi powyższej macierzy.

Zadanie 4.

Dany jest prostopadłościan o długości krawędzi równych odpowiednio 1, 2, 4. Oblicz odległość d przekątnej prostopadłościanu od rozłącznej z nią przekątnej największej ściany bocznej.

Zadanie 5.

Niech V będzie przestrzenią wielomianów rzeczywistych stopnia ≤ 3 . Rozważmy odwzorowanie liniowe $F : V \rightarrow V$ zadane w bazie $\{1, x, x^2, x^3\}$ macierzą:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Znajdź wielomian (współczynniki wielomianu) $w \in V$ taki, że:

$$F(w(x)) \equiv 8 - 3x + 7x^2 + 9x^3.$$

Zadanie 6.

Rozwiąż następujące równania różniczkowe z zadanymi warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned} a) & y' + yy' - x = 0, & y(x=3) &= -5; \\ b) & \ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0, & x(t=0) &= 2, & \dot{x}(t=0) &= 2. \end{aligned}$$