

Drugi pisemny egzamin poprawkowy z MATEMATYKI I NKF
do wykładu prof. P. Urbańskiego

Wszystkie zadania należy rozwiązywać na osobnych kartkach! Każdą kartkę należy podpisać imieniem i nazwiskiem!

Zadanie 1.(4pkt.)

Z badać przebieg zmienności funkcji, określonej następującym wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}.$$

Następnie naszkicować wykres tej funkcji, ze szczególnym uwzględnieniem jej punktów charakterystycznych.

Zadanie 2.(4pkt.)

Dane są trzy zbiory (obszary dwuwymiarowe):

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \cdot y \leq 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^3\}, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 16y\}.$$

Narysować w układzie współrzędnych zbiory A, B, C oraz ich część wspólną. Następnie obliczyć pole zbioru $A \cap B \cap C$.

Zadanie 3.(4pkt.)

Sprawdź czy funkcja zdefiniowana poniższym wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 2x}{x^2} & \text{dla } x < 0, \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 + 2z - 3}{z - 1} & \text{dla } x = 0, \\ \frac{e^{4x} - 1}{x} & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 4.(4pkt.)

Z badać zbieżność następujących szeregów:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^{10}}, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Zadanie 5.(2x4pkt.)

Założmy, że gra w kości polega na jednoczesnym rzucaniu dwoma sześciennymi kostkami, których ściany ponumerowane są liczbami od 1 do 6.

Dwa rzuty nazwiemy równoważnymi, jeżeli:

- a) W obydwu rzutach suma oczek wynosi tyle samo.
- b) W obydwu rzutach iloczyn oczek wynosi tyle samo.

Zaproponuj dowolny symbol dla oznaczenia zbioru, w którym zostały wprowadzone relacje a i b, a następnie podaj ten zbiór wypisując jego elementy. Jaka jest przestrzeń (nadzbiór - „boisko”) dla relacji a i b?

Dla wybranej relacji (a lub b) sformułuj jej matematyczną definicję; udowodnij, że jest równoważnością i znajdź klasy abstrakcji. Zilustruj graficznie klasy abstrakcji oraz podaj ich liczbę.