12.02.2004

Poprawkowy egzamin pisemny z MATEMATYKI I NKF
do wykładu prof. P. Urbańskiego

Zadania 1,2 proszę rozwiązywać na innych kartkach niż zadania 3,4,5! Każdą kartkę należy podpisać imieniem i nazwiskiem oraz podać nr grupy.

Zadanie 1.(4pkt.)
Zbadać przebieg zmienności funkcji, określonej następującym wzorem:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}.$$

Następnie naszkicować wykres funkcji f, ze szczególnym uwzględnieniem jej punktów charakterystycznych.

Zadanie 2.(4pkt.)
Dane są trzy zbiory (obszary dwuwymiarowe):

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x{\cdot}y \leq 1\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}, \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 8y\}.$$

Narysować w układzie współrzędnych zbiory A, B, C oraz ich część wspólną. Następnie obliczyć pole zbioru $A \cap B \cap C$.

Zadanie 3.(4pkt.)
Iloczyn trzech liczb dodatnich a, b, c wynosi π. Znaleźć te liczby wiedząc, że funkcja zdefiniowana poniższym wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{dla} \quad x \leq 0, \\ \frac{x}{\operatorname{tg} bx} & \text{dla} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2b}, \\ x - c & \text{dla} \quad x \geq \frac{\pi}{2b}, \end{cases}$$

jest ciągła w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Zadanie 4.(4pkt.)
W zbiorze $A = \{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 : |k| \leq 4 \ \wedge \ |l| \leq 4\}$ definiujemy relację:

$$(k,l) \sim (m,n) \ \Leftrightarrow \ |k| + |l| = |m| + |n|.$$

Wykazać, że jest to relacja równoważności. Znaleźć i narysować wszystkie klasy abstrakcji tej relacji oraz podać ich liczbę.

Zadanie 5.(2x4pkt.)
Dany jest szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}.$$

Wykonać jedno z poniższych poleceń:

A) Zbadać zbieżność rozważanego szeregu oraz udowodnić indukcyjnie następujący wzór na wyraz ogólny ciągu sum częściowych tego szeregu:

$$s_n = \frac{2^{n+3} - n^2 - 5n - 8}{2^n}.$$

B) Obliczyć sumę szeregu wykorzystując wzór z poprzedniego punktu. Następnie obliczyć tą sumę metodą opartą na szeregu geometrycznym. Czy dwie różne metody prowadzą do tego samego wyniku?

Honorata Zduńczuk & Grzegorz Koczan