19.11.2003

II seria zadań z matematyki I NKF do wykładu prof. Urbańskiego

Zadanie 1. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n prawdziwe są równości:

$$a)\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+3+...+n)^2,$$

$$b)\ cos\,x + cos\,2x + \dots + cos\,nx = \frac{sin\,(n+\frac{1}{2})x - sin\,\frac{1}{2}x}{2sin\,\frac{1}{2}x},$$

$$c)\ 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

Zadanie 2. Do jakiej potęgi należy podnieść dwumian $(a+b)$, aby w rozwinięciu suma wykładników potęg liczby a we wszystkich wyrazach wynosiła 120?

Zadanie 3. Dla jakich wartości porametru k ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym:

$$a_n = \frac{(k-2)n+1}{(k^2-2k-3)n-2}$$

jest:
a) zbieżny do 0,
b) zbieżny do 1,
c) rozbieżny do - ∞,
d) rozbieżny do + ∞,
a) zbieżny do liczby $a \in [2,10]$?

Zadanie 4. Obliczyć granice następujących ciągów:

$$a)\ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}, \quad b)\ b_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}, \quad c)\ c_n = \left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)^{3n+1},$$

$$d)\ d_n = 3n - \sqrt{9n^2+6n-15}, \quad f)\ f_n = \frac{n\,cos(2n-8)}{2n^3-1},$$

$$e)\ e_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \dots + \frac{n}{n^2+n}.$$

Zadanie 5. W zbiorze liczb rzeczywistych definiujemy relację:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad E(x) = E(y),$$

gdzie $E(x)$ jest największą liczbą całkowitą mniejszą od x. Narysować wykres tej relacji oraz wykazać, że jest ona relacją równoważności. Jaką postać mają klasy abstrakcji tej relacji? W zbiorze klas abstrakcji definiujemy działanie dodawania:

$$[x] + [y] = \big[E(x) + E(y)\big].$$

Wykazać, że definicja ta nie zależy od reprezentantów klas abstrakcji.

Zadanie 6. W zbiorze liczb rzeczywistych definiujemy relację:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad (-1 < y - x < 1).$$

Narysować wykres relacji i sprawdzić czy jest ona relacją równoważności.

Zadanie 7. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

$$a)\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x}{x^3+x} & \text{dla} \quad x < 0, \\ \frac{x^2-4}{x-2} & \text{dla} \quad 0 < x \neq 2, \\ 4 & \text{dla} \quad x = 2; \end{cases}$$

$$b)\ \ f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x-3} & \text{dla} \quad x \neq 3, \\ 27 & \text{dla} \quad x = 3. \end{cases}$$

Zadanie 8. Opierając się jedynie na własnościach funkcji ciągłych wykazać, że poniższe równania posiadają conajmniej n rozwiązań rzeczywistych:

$$a)\ \ x^2 + 5x - 4 = 0, \quad n = 2;$$

$$b)\ \ x^5 - x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 7x + 3 = 0, \quad n = 3.$$

Zadanie 9. Wykazać, że następujące funkcje są na zadanym zbiorze A odwzorowaniami zbliżającymi:

$$a)\ \ f(x) = \frac{1}{x^2} + 2, \quad A = [2, +\infty[;$$

$$b)\ \ f(x) = \sqrt[3]{x+1}, \quad A = [0, +\infty[;$$

$$c*)\ \ f(x) = \frac{1}{x^2+2}, \quad A = \mathbb{R}.$$

Wskazówka: W przykładzie $c*$) warto wykorzystać następujące nierówności:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad x^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}|x|.$$

Zadanie 10. W oparciu o zasadę Banacha wykazać zbieżność i znaleźć granicę następujących ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie:

$$a)\ \ a_{n+1} = \frac{7 + a_n^2}{2a_n}, \quad a_1 \geq \frac{5}{2};$$

$$b)\ \ b_{n+1} = \frac{1}{10}b_n^2 + \frac{1}{5}b_n + \frac{1}{4}, \quad b_1 \in [-2, 2].$$

Zadanie 11. Zastosuj metodę kolejnych przybliżeń dla następującego równania:

$$x = \frac{1}{10}x^4 + \frac{1}{5} \quad \text{gdzie} \quad |x| \leq 1.$$

Czy ciąg kolejnych przybliżeń zbiega do rzeczywistego rozwiązania (sprawdź założenia twierdzenia Banacha)? Przy pomocy kalkulatora lub komputera oblicz 10 pierwszych wyrazów tego ciągu.

Grzegorz Koczan & Honorata Zduńczuk