

Zadania do kolokwium z matematyki I NKF

Zadanie 1. Wyznaczyć pochodne następujących funkcji:

$$a) y = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x^2 + 3}}, \quad b) y = \ln(x^2 + 2x + 3), \quad c) y = x \arccos x^2 \quad d) y = x^{\ln x}.$$

Zadanie 2. Obliczyć następujące granice funkcji:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}, \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}.$$

Zadanie 3. Zbadać, a następnie naszkicować wykres funkcji:

$$y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} - (x - 1)^{\frac{2}{3}}.$$

Zwrócić szczególną uwagę na „ostrza” wykresu.

Zadanie 4. Naszkicować wykres następującej funkcji:

$$f(x) = \frac{1 - x^3}{x^2}.$$

Zadanie 5. Rozwinąć funkcję $f(x) = \ln(1 + x)$ w szereg Taylora, a następnie obliczyć przybliżoną wartość $\ln 2$. Rachunek wykonać z dokładnością do wyrazów piątego rzędu oraz podać błąd maksymalny.

Zadanie 6. Wykorzystując wzór Taylora dla odpowiedniej funkcji obliczyć przybliżoną wartość $\sqrt{3}$. Rachunek można wykonać bezpośrednio lub licząc najpierw odwrotność:

$$\sqrt{3} = \sqrt{1 + 2} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}}.$$

Która metoda jest dokładniejsza i dlaczego? Rachunki wykonać z dokładnością do wyrazów czwartego rzędu.

Zadanie 7. Z pomocą prostych podstawień znaleźć rodzinę funkcji pierwotnych dla każdej z poniższych funkcji:

$$a) f(x) = \frac{x^3}{2 + 3x^4}, \quad b) f(x) = \frac{x^5}{6 + 5x^6}, \quad c) f(x) = \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x}.$$

Zadanie 8. Stosując metodę całkowania przez części spierwotnic następujące funkcje:

$$a) \operatorname{arctg}, \quad b) \operatorname{arch}, \quad c) \ln^2.$$

Zadanie 9. Oblicz następującą całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 7} dx.$$

Zadanie 10. Oblicz następującą całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$