16.10.2003

I seria zadań z matematyki I NKF do wykładu prof. Urbańskiego

Zadanie 1. Na podstawie łączności koniugcji i alternatywy udowodnić łączność mnożenia i dodawania zbiorów:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Zadanie 2. Korzystając z definicji działań na zbiorach udowodnić tożsamości:

$$a)\ A \cap B = A - (A - B), \quad b)\ A \cup (B - A) = A \cup B,$$

$$c)\ A - (A \cap B) = A - B, \quad d)\ A \cap (B - C) = (A \cap B) - C.$$

Zadanie 3. Wykorzystując prawa rozdzielności dla mnożenia i dodawania zbiorów udowodnić wzór:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C).$$

Zadanie 4. Udowodnić tożsamości:

$$a)\ (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C), \quad b)\ A - (B \cup C) = (A - B) - C.$$

Zadanie 5. W oparciu o definicję iloczynu kartezjańskiego udowodnić tożsamość:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$

Zadanie 6. W zbiorze liczb rzeczywistych dane są relacje:

$$a)\ \mathcal{R}_1 = \{(x,y) : x + y = 4\}, \quad b)\ \mathcal{R}_2 = \{(x,y) : |x - y| \leq 2\},$$

$$c)\ \mathcal{R}_3 = \{(x,y) : y \geq x\}, \quad d)\ \mathcal{R}_4 = \{(x,y) : 1 \leq (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}.$$

Podać obrazy i przeciwobrazy tych relacji. Czy podane relacje są zwrotne, symetryczne, przechodnie i prawostronnie jednoznaczne?

Zadanie 7. Niech $\mathcal{P}$ będzie relacją podzielności w zbiorze liczb naturalnych, tzn.:

$$\mathcal{P} = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \bigvee_{k \in \mathbb{N}} m = kn\}.$$

Narysować wykres relacji $\mathcal{P}$.

Zadanie 8. Narysować wykresy poniższych relacji określonych w zbiorze $\mathbb{R}$:

$$a)\ \mathcal{R}_1 = \{(x,y) : x^2 - y^2 = 1\}, \quad b)\ \mathcal{R}_2 = \{(x,y) : |x| > y\},$$

$$c)\ \mathcal{R}_3 = \{(x,y) : |\sin x| < y \leq |\mathrm{tg}\, x| \quad \wedge \quad |x| < \pi/2\}.$$

Zadanie 9. W układzie współrzędnych narysować wykresy następujących relacji w $\mathbb{R}$:

$$a)\ x \sim y \Leftrightarrow (2 \leq |x - y| \leq 5), \quad b)\ x \sim y \Leftrightarrow (x^2 < y < \sqrt{|x|}),$$

$$c)\ x \sim y \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x} < y < x^3).$$

Jakie własności posiadają te relacje?

Zadanie 10. W zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rozważmy relację $\mathcal{Z}$ taką, że:

$$(m_1, n_1)\mathcal{Z}(m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1.$$

Wykaż, że jest to relacja równoważności. Zilustruj graficznie klasy abstrakcji relacji $\mathcal{Z}$. Wyjaśnij dlaczego przestrzeń ilorazową $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\mathcal{Z}$ można traktować jako definicję zbioru liczb całkowitych $\mathbb{Z}$.

Zadanie 11. W zbiorze $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ rozważmy relację $\mathcal{Q}$ taką, że:

$$(k_1, l_1)\mathcal{Q}(k_2, l_2) \Leftrightarrow k_1 \cdot l_2 = k_2 \cdot l_1.$$

Wykaż, że jest to relacja równoważności. Zilustruj graficznie klasy abstrakcji relacji $\mathcal{Q}$. Wyjaśnij dlaczego przestrzeń ilorazową $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathcal{Q}$ można traktować jako definicję zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

Zadanie 12. Które z poniższych relacji są relacjami równoważności:
a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$,
b) relacja podobieństwa trójkątów,
c) relacja prostopadłości prostych w zbiorze prostych na płaszczyźnie,
d) relacja równoległości prostych w zbiorze prostych w trzech wymiarach.

Zadanie 13. Rozważmy trójkąt ABC o wierzchołkach: A=(0,0);B=(0,2);C=(2,2). Zbiór punktów tego trójkąta oznaczmy przez A_1. Środki boków trójkata ABC wyznaczają wierzchołki trójkąta, który zostanie usunięty (ale boki tego trójkąta pozostawiamy). W ten sposób otrzymamy trzy mniejsze trójkąty stanowiące zbiór punktów A_2. Usuwając w analogiczny sposób środki tych trzech mniejszych trójkątów otrzymamy dziewięć trójkącików - zbiór A_3. Postępując tak dalej uzyskamy „ciąg” figur (zbiorów) (A_n). Część wspólna (iloczyn zbiorów) wszystkich elementów „ciągu” (A_n) nosi nazwę trójkąta Sierpińskiego.
a) Posługując się poznaną na ćwiczeniach metodą graficzną zbadaj czy zbiory $A_1, A_2, A_3, \cdots$ określają w zbiorze liczb rzeczywistych relację przechodnią. Czy wobec tego rozważany zbiór Sierpińskiego jest relacją przechodnią? Odpowiedź logicznie uzasadnij.
b*) Następnie wykonaj polecenia z punktu a) dla przypadku trójkątów pozbawionych boków. Uwaga: w przypadku trójkątów otwartych zbiór Sierpińskiego będzie zbiorem mniejszym, ale nadal niepustym.

Zadanie 14. Narysuj relację:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + (y-3)^2 \le 1 \ \vee \ (x-3)^2 + (y+3)^2 \le 1\}.$$

Następnie posługując się metodą graficzną uzupełnij relację A do relacji przechodniej, tzn. skonstruuj takie minimalne rozszerzenie zbioru A, aby tworzyło ono relację przechodnią.

Zadanie 15. Jakie są największe rzeczywiste zbiory X, Y dla których podany niżej wzór definiuje odwzorowanie suriektywne $f : X \to Y$?

$$a)\ f(x) = \frac{1}{x-3}, \quad b)\ f(x) = \frac{4}{x^2 - 5x + 4}, \quad c)\ f(x) = \frac{1}{\log(2x-2) - \log(x-5)},$$

$$d)\ f(x) = \frac{1}{\log(4x+8)}, \quad e)\ f(x) = \sqrt{\log(x^2-8)}, \quad f)\ f(x) = \sqrt{\sin(2x - \pi/6)}.$$

Zadanie 16. Dane są przykłady relacji $\mathcal{R} \subset X \times Y$:

$$a)\ X = [-1, 3],\ Y = [-4, 60], \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 - 4x;$$

$$b)\ X = [0, 6],\ Y = [0, 10], \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = \log(x^2 + 6x + 8);$$

$$c)\ X = [0, 2],\ Y = [-5, 110], \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = 3x^4 - 28x^3 + 72x^2 - 5.$$

Czy podane relacje są odwzorowaniami? Jeżeli tak, to czy są one suriekcją, injekcją, bijekcją?

Zadanie 17. Dane są przykłady zbiorów $D \subset \mathbb{R}^2, Z \subset \mathbb{R}$ oraz relacji $\mathcal{B} \subset D \times Z$:

$$a)\ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\},\ Z = [0,6], \quad (x,y)\mathcal{B}z \Leftrightarrow z = x^2 + y^2;$$

$$b)\ D = [-1,1] \times [-1,1],\ Z = [0,2], \quad (x,y)\mathcal{B}z \Leftrightarrow z = \sqrt{2 - x^2 - y^2};$$

$$c)\ D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2y\},\ Z = [-2,2], \quad (x,y)\mathcal{B}z \Leftrightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Podać obraz $\mathcal{B}(D)$ i przeciwobraz $\mathcal{B}^{-1}(D)$ dla każdej relacji. Czy podane relacje są odwzorowaniami? Jeżeli tak, to czy są one suriekcjami?

Zadanie 18. W zbiorze liczb rzeczywistych dane są relacje:

$$a)\, A = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}; \quad b)\, B = \{(x,y) : x^2 - y^2 = 0\}; \quad c)\, C = \{(x,y) : y = x^3 - x\}.$$

Dla każdego przypadku zaproponuj możliwie duże zbiory X, Y, takie aby dana relacja ograniczona do zbioru $X \times Y$ (nowe boisko) stanowiła odwzorowanie. Następnie zaproponuj zbiory $X' \subset X, Y' \subset Y$, takie aby odwzorowanie na zbiorze $X' \times Y'$ było bijekcją.

Zadanie 19. Udowodnij indukcyjnie wzór:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)/30.$$

Zadanie 20. Udowodnij indukcyjnie uogólnioną nierówność Bernouliego:

$$(1+a)^n \geq 1 + na + n(n-1)a^2/2 \quad \text{gdzie} \quad a \geq 0.$$

Zadanie 21. Wykaż prawdziwość wzoru:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Zadanie 22. Dany jest ciąg (a_n) zdefiniowany rekurencyjnie:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 7, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n.$$

Wyprowadź, a następnie udowodnij indukcyjnie wzór na dowolny wyraz tego ciągu:

$$a_n = 2^n + 3^{n-1}.$$

Zadanie 23. Dany jest ciąg (b_n) zdefiniowany rekurencyjnie:

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 16, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.$$

Wyprowadź, a następnie udowodnij indukcyjnie wzór na dowolny wyraz tego ciągu:

$$a_n = n2^{n-1} + 3 \cdot 2^n.$$

Zadanie 24. Ciąg Fibonacciego jest zdefiniowany następująco:

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Wyprowadź, a następnie udowodnij indukcyjnie wzór na dowolny wyraz tego ciągu.

Zadanie 25. Dany jest ciąg (c_n) zdefiniowany rekurencyjnie:

$$c_1 = 6, \quad c_2 = 19, \quad c_3 = 68, \quad c_{n+3} = 6c_{n+2} - 9c_{n+1} + 4c_n.$$

Wyprowadź lub udowodnij indukcyjnie wzór na dowolny wyraz tego ciągu:

$$c_n = 4^n + n + 1.$$

Grzegorz Koczan