01.04.2004

Rozwiązanie zadania 2 z serii 4

W obszarze czasoprzestrzeni dla którego $x_o < |\boldsymbol{x}|$ pole elektromagnetyczne jest zwykłym kulombowskim polem elektrycznym, zaś pole w obszarze $x_o > |\boldsymbol{x}|$ jest tożsame polu jednostajnie poruszającego się ładunku z prędkością v. Widać zatem, że rozwiązanie w obszarze $x_o \neq |\boldsymbol{x}|$ nie jest skomplikowane. Okazuje się natomiast, że rozwiązanie na powierzchni $x_o = |\boldsymbol{x}|$ jest bardziej złożone. Celem znalezienia tego rozwiązania obliczymy czteropotencjał określony przez propagator retardowany wzorem:

$$A^\mu(x) = \mu_o \int D_R(x-x')\, j^\mu(x')\, d^4x' \quad \text{gdzie} \quad D_R(x-x') = \frac{\delta(x_o - x'_o - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|}. \tag{1}$$

Zgodnie z warunkami zadania gęstość czteroprądu ma postać:

$$j^o(x') = Qc\,\delta^{(3)}\big(\boldsymbol{x'} - \theta(x'_o)\boldsymbol{\beta}\, x'_o\big), \quad \boldsymbol{j}(x') = \theta(x'_o)Qc\,\boldsymbol{\beta}\,\delta^{(3)}\big(\boldsymbol{x'} - \theta(x'_o)\boldsymbol{\beta}\, x'_o\big), \tag{2}$$

gdzie została użyta funkcja Heaviside'a θ oraz bezwymiarowy wektor prędkości $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$. Zwróćmy uwagę na to, że wartość $\boldsymbol{j}$ dla $x'_o = 0$ ma charakter umowny, wobec czego nie powinna mieć ona wpływu na pole elektromagnetyczne. Będziemy przyjmować, że $\theta(0) = 1/2$.

Na podstawie (2) możemy przystapić do wykonania całki (1). Ze względu na deltę Diraca wykonanie całki po trójobjętości nie stwarza problemu. Wykonanie całki po x'_o wymaga rozwiązania następującego równania algebraicznego:

$$x_o - x'_o = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\beta}\, x'_o| \quad \Rightarrow \quad x_o - x'_o = \frac{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x} - \beta^2 x_o + R(x)}{1-\beta^2}, \tag{3}$$

gdzie R jest pierwiastkiem wyróżnika odpowiedniego równania kwadratowego i dane jest wzorem:

$$R(x) = \sqrt{(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x} - \beta^2 x_o)^2 + (1-\beta^2)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\beta}x_o)^2}. \tag{4}$$

Rozwiązanie (3) z pomocą wzoru $\delta(f(t)) = \delta(t-t_o)/|f'(t_o)|$ umożliwia następujące przekształcenie wyrażenia podcałkowego:

$$\frac{\delta\big(x_o - x'_o - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\beta}x'_o|\big)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\beta}x'_o|} = \frac{\delta\big(x'_o - x'_o(x)\big)}{R(x)}. \tag{5}$$

Wykorzystanie tego wzoru prowadzi już bezpośrednio do wyrażenia na czteropotencjał:

$$A^o(x) = \frac{\mu_o c}{4\pi}\frac{Q}{R(x)}, \quad \boldsymbol{A}(x) = \frac{\mu_o c}{4\pi}\frac{Q\boldsymbol{\beta}}{R(x)} \quad \text{dla} \quad x_o > |\boldsymbol{x}|; \tag{6}$$

$$A^o(x) = \frac{\mu_o c}{4\pi}\frac{Q}{|\boldsymbol{x}|}, \quad \boldsymbol{A}(x) = 0 \quad \text{dla} \quad x_o < |\boldsymbol{x}|. \tag{7}$$

Przy pomocy funkcji Heaviside'a powyższe wyrażenia możemy zapisać w sposób bardziej zwarty:

$$A^o(x) = \frac{\mu_o c}{4\pi}\frac{Q}{|\boldsymbol{x}|}\theta(|\boldsymbol{x}| - x_o) + \frac{\mu_o c}{4\pi}\frac{Q}{R(x)}\theta(x_o - |\boldsymbol{x}|), \quad \boldsymbol{A}(x) = \frac{\mu_o c}{4\pi}\frac{Q\boldsymbol{\beta}}{R(x)}\theta(x_o - |\boldsymbol{x}|); \tag{8}$$

przy czym określana przez ten wzór wartość czteropotencjału na powierzchni $x_o = |\boldsymbol{x}|$ nie ma znaczenia. Poprzez różniczkowanie tego potencjału w sensie dystrybucyjnym otrzymamy pole elektryczne i magnetyczne w całej czasoprzestrzeni:

$$\boldsymbol{E}(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta}x_o}{|\boldsymbol{x}|R(x)} - \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2}\right)\delta(x_o - |\boldsymbol{x}|) + \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}\theta(|\boldsymbol{x}| - x_o) + (1-\beta^2)\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta}x_o}{R^3(x)}\theta(x_o - |\boldsymbol{x}|)\right],$$

$$\boldsymbol{B}(x) = \frac{\mu_o c Q}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|R(x)}\delta(x_o - |\boldsymbol{x}|) + (1-\beta^2)\frac{\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{x}}{R^3(x)}\theta(x_o - |\boldsymbol{x}|)\right].$$

Z równań tych jasno wynika, że sfera $x_o = |\boldsymbol{x}|$ jest powierzchnią nieciągłości pola elektromagnetycznnego na której to pole dąży do nieskończoności. Zbadajmy bardziej dokładnie ciągłośc składowych stycznych i normalnych pola elektromagnetycznego na rozważanej sferze. Wykorzystując, że na tej sferze $R(x) = |\boldsymbol{x}| - \beta\mathrm{x}$ zauważamy, że:

1. Składowa normalna pola magnetycznego B_n jest ciągła i przyjmuje wartość zero.

2. Składowa styczna pola magnetycznego B_s jest ciągła tylko w dwóch punktach (stanowiących przecięcie kierunku prędkości cząstki z rozważaną sferą) gdzie przyjmuje ona wartość zero. W pozostałych punktach składowa B_s jest nieciągła, a na sferze jej wartość dąży do nieskończoności.

3. Składowa normalna pola elektrycznego E_n jest ciągła tyko na okręgu, będącym przecięciem sfery z płaszczyzną zadaną wzorem:

$$\mathrm{x} = \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}|\boldsymbol{x}|. \tag{9}$$

   W pozostałych punktach składowa E_n nie jest ciągła, ale przyjmuje skończoną wartość na powierzchni sfery.

4. Składowa styczna pola elektrycznego E_s jest ciągła tylko w dwóch punktach (w tych samych co składowa B_s), w ktorych przyjmuje wartość zero. W pozostałych punktach składowa E_s jest nieciągła, a na sferze jej wartość dąży do nieskończoności.

Grzegorz Koczan