Fizyka I (Mechanika)

Zadania na ćwiczenia - seria 1

Tydzień 2-6.10.23

Zadanie 1

Przeanalizuj definicję układu współrzędnych prostokątnych.

- **Wersor osi** $\mathcal{O}x$: wektor o długości jednostkowej, skierowany w kierunku dodatnim osi $\mathcal{O}x$.
- Na płaszczyźnie możemy wybrać dwa wzajemnie prostopadłe wersory definiujące osie $\mathcal{O}x$ i $\mathcal{O}y$. Jak wybrać kierunek trzeciego wersora?
- Dlaczego prawoskrętny?

Zadanie 2

Współrzędne i składowe wektorów.

- **Współrzędne punktu** na osiach układu $\mathcal{O}xyz$ określamy przez rzut prostokątny punktu na osie $\mathcal{O}x$, $\mathcal{O}y, \mathcal{O}z$
- **Współrzędną wektora** na danej osi nazywamy **liczbę**, która jest równa różnicy współrzędnych końca i początku wektora na tej osi.
- **Składową wektora** $\vec{A}$ wzdłuż danej osi nazywamy **wektor**, który jest rzutem prostopadłym wektora $\vec{A}$ na tę oś.

Przykład: dany jest wektor o współrzędnych $[x, y, z] = (2, 3, 4)$. Narysuj ten wektor i wyraź go przez sumę jego składowych.

Zadanie 3

Przedstaw graficznie następujące prawa związane z rachunkiem wektorowym.

$$\begin{aligned}
\vec{A} + \vec{B} &= \vec{B} + \vec{A} - \text{ przemienność dodawania} \\
\vec{A} + \overrightarrow{0} &= \vec{A} - \text{ istnieje wektor zerowy} \\
\vec{A} + \overrightarrow{A'} &= \overrightarrow{0} - \text{ dla każdego wektora istnieje wektor przeciwny, } \overrightarrow{A'} = -\vec{A} \\
\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) &= (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} - \text{ łączność dodawania} \\
a(\vec{A} + \vec{B}) &= a\vec{A} + a\vec{B} - \text{ rozdzielczość dodawania względem mnożenia}
\end{aligned}$$

Przypomnienie: definicje iloczynu skalarnego i wektorowego.

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \vec{B} &= AB\cos(\vec{A}, \vec{B}) - \text{ iloczyn skalarny - liczba} \\
\vec{A} \times \vec{B} &= AB\sin(\vec{A}, \vec{B})\vec{e} - \text{ iloczyn wektorowy - wektor}
\end{aligned}$$

Zadanie 4

Przeanalizuj następujące właściwości iloczynu skalarnego wektorów. Cosinus kąta między wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$ jest równy iloczynowi skalarnemu wersorów w kierunku $\vec{A}$ i $\vec{B}$:

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B$$

Iloczyn skalarny wersorów wzajemnie prostopadłych:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$$
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad i = j \\ 0 & \text{gdy} \quad i \neq j \end{cases}$$

Jeśli $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ oraz $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$, to:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \sum_{i=x,y,z} A_iB_i = A_iB_j\delta_{ij}$$

Zadanie 5

Dane są dwa wektory: $\vec{A} = [3, 3\sqrt{3}, 0]$ oraz $\vec{B} = [3, \sqrt{3}, 0]$. Oblicz ich iloczyn skalarny korzystając z następujących metod:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i,j=x,y,z} a_ib_j\delta_{ij}$$
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\theta$$

gdzie θ to kąt między wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

Zadanie 6

Korzystając z definicji iloczynu skalarnego, znajdź kąt między wektorami $\vec{A} = (1, 2, 3)$ i $\vec{B} = (2, -1, -2)$.

Zadanie 7

Określić współrzędne sferyczne wektora $-\vec{r}$, jeśli $\vec{r} = (x, y, z)$ posiada współrzędne sferyczne (r, θ, φ).

Zadanie 8

Sprawdzić tożsamości wektorowe:

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$,
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Zadanie 9

Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach:

1. $\vec{a} = (1, 0, 3), \vec{b} = \left(0, -1, \frac{1}{2}\right), \vec{c} = \left(-\frac{1}{3}, -1, 1\right)$,
2. $\vec{a} = (6, 4, 2), \vec{b} = (-9, 6, 3), \vec{c} = (-3, 6, 3)$.

Zadanie 10

Sprawdź, czy wektory $\vec{A} = (3, 1, 2)$ i $\vec{B} = (1, -3, 0)$ sa prostopadłe, a wektory $\vec{C} = (4, 0, 2), \vec{D} = (2, -2, 1)$ oraz $\vec{F} = (2, 2, 1)$ leżą w jednej płaszczyźnie.

Zadanie 11

Oblicz pochodną funkcji $\sin^2(\ln(x^2 + x^4))$ względem x, względem x^2, względem $x^2 + x^4$ i względem $\ln(x^2 + x^4)$.