

Model Blacka-Scholesa

*„ Średnie giełdowe odzwierciedlają
wszystko za wyjątkiem działań Pana Boga ”
I zasada Dow ¹*

Rafał Ciesielski²

*Institut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytet Warszawski*

Streszczenie

W pracy zaprezentujemy model Blacka-Scholesa, który jako element Inżynierii Finansowej odgrywa niebagatelną rolę w efektywnym zarządzaniu ryzykiem. Krótko prześledzimy tło historyczne, którego konsekwencją było powstanie wyżej wymienionego modelu, a zaprezentowane przykłady przybliżą jego zastosowania praktyczne. Dwaj jego twórcy, Robert C. Merton oraz Myron Scholes, zostali w roku 1997 uhonorowani Nagrodą Nobla w dziedzinie ekonomii.

¹Charles H. Dow, założyciel firmy Dow Jones & Company, która do dziś wydaje „The Wall Street Journal”.

²email:ciesiel@fuw.edu.pl, Copyright ©Rafał Ciesielski

Spis treści

1	Historia	1
2	A może grzane wino	3
3	Zarządzanie ryzykiem	5
3.1	Rozkład logarytmiczno-normalny	5
3.1.1	Założenia	5
3.1.2	Parametry	5
3.2	Przykład	6
4	Model Blacka-Scholesa	7
4.1	Założenia	7
4.2	Wzory wyceny opcji	7
4.3	Własności wzorów Blacka-Scholesa	8
4.3.1	$S \rightarrow \infty$	8
4.3.2	$\sigma \rightarrow 0$	9
4.3.3	$T \rightarrow 0$	10
4.4	Przykład	10
5	Podsumowanie	12

1 Historia

Zanim bliżej przyjrzymy się instrumentom pochodnym i modelowi „Blacka-Scholesa”, spójrzmy na tło historyczne. Przedstawiając pokrótce wydarzenia, które doprowadziły do powstania Inżynierii Finansowej³, a dokładniej jej fragmentu jakim jest model „Blacka-Scholesa”, autor pragnie zaznaczyć, iż nie jest ekspertem z dziedziny ekonomii, a ograniczony zasób czasu i forma eseju narzuciły pewne skróty myślowe. W celu bardziej szczegółowego poznania omawianych zagadnień autor odsyła do literatury [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

Historycznie, [6], instytucje finansowe wywodzą się ze średniowiecznych jarmarków i ofert kupna i sprzedaży zawieranych pomiędzy kupującym a sprzedającym. Z czasem osobisty kontakt kupującego ze sprzedającym został wyparty przez osoby upoważnione do zawierania kontraktów, agentów - pośredników, tzw. maklerów⁴.

Pierwsze kontrakty terminowe pojawiły się w XVII wieku, na giełdzie w Amsterdamie (założonej w 1608 roku). Były to umowy pomiędzy kupującymi a sprzedającymi towar, który powinien być dostarczony do odbiorcy w przyszłości **po cenie ustalonej w momencie zawarcia kontraktu**.

³ Inżynieria Finansowa, [7], to umiejętność projektowania, konstruowania i wdrażania innowacji finansowych w dziedzinie nowoczesnego zarządzania finansami. Umożliwia optymalny wybór metody finansowania działalności i efektywne zarządzanie ryzykiem, silnie wsparte przez zaawansowane metody wyceny instrumentów pochodnych i modelowania ryzyka, a także przez nowoczesną technologię informatyczną.

⁴ Makler, XVII wiek, pierwsze regulacje prawne dotyczące zawodu maklera określiło w 1667r Kupieckie Dyrektorium w Zurychu.

Celem zawierania kontraktów terminowych, [5], było zgromadzenie funduszy na bieżącą działalność na poczet przyszłych zysków. Najlepiej to widać na przykładzie produktów rolnych. Farmer dążył do zdobycia funduszy na bieżącą działalność w okresie zasiewów, a na ewentualne zyski mógł liczyć w okresie zbiorów. Przy czym jego dochody były uzależnione od chwilowej sytuacji na rynku. To znaczy w latach wyjątkowego urodzaju ceny płodów rolnych mogły spaść poniżej granicy opłacalności oraz pojawiał się problem ze zbytem, natomiast podczas lat nieurodzaju mógł liczyć⁵ na spore dochody, ponieważ popyt znacznie przewyższał podaż.

W podobnej sytuacji znajdowali się kupujący, dla nich lata urodzaju oznaczały spadek cen za nabywane towary, ale w latach nieurodzaju pojawiały się problemy ze znalezieniem dostawców, i duże zyski w przypadku posiadania tegoż zboża.

Tak więc obie grupy starały się zminimalizować wpływ wahań cenowych zawierając kontrakty terminowe, umawiając się, za jaką cenę i ile danego towaru zostanie dostarczone. Taki sposób postępowania nie eliminował jednak ryzyka związanego ze zmianą ceny produktu.

Jak widzimy, nieprzypadkowo kontrakty terminowe najwcześniej pojawiły się na rynku rolnym. Pierwsza giełda powstała w Chicago i była odpowiedzią na rozchwiany rynek produktów rolnych.

Pomimo ryzyka, jakie to ze sobą wiązało, kupcy zaakceptowali ideę nabywania zboża z wyprzedzeniem, **forward**, czyli przed jego fizyczną dostawą. Transakcje te gwarantowały odpowiedni zapas zboża do odsprzedaży, co miało niebagatelne znaczenie w latach nieurodzaju. Jednak kupcy cały czas ponosili ryzyko, że zapłacą zbyt wysoką cenę za dostarczony towar, a tym samym poniosą stratę odsprzedając je później na rynku.

Próba rozwiązania tego problemu, czy raczej zmniejszenia ryzyka związanego z wahaniami cen, byli tak zwani fałszywi kupcy, **fauxmerchants**, którzy oferowali kupującym drugi kontrakt **forward**, w którym zobowiązywali się do kupna tego samego ziarna po cenie, na którą ewentualne spadki cen rynkowych nie miałyby wpływu. Liczyli oni oczywiście, że cena ziarna wzrośnie a tym samym osiągną zysk.

Ostatecznie funkcja „fałszywych kupców”, którzy byli zainteresowani wyłącznie ekonomicznymi skutkami transakcji, stała się profesją. A oni sami zaczęli działać w ramach powstałej w 1859 roku „Chicago Board of Trade (CBOT)”. Giełda w Chicago działała jako efektywny rynek terminowy, osiągając dojrzałość z chwilą utworzenia izby rozliczeniowej.

Problemy związane z wyceną kontraktów zbożowych, były zbliżone do problemów wyceny kontraktów terminowych w innych działach gospodarki. W późniejszych latach tworzono kontrakty **futures**, by umożliwić prowadzenie transakcji zabezpieczających w energetyce, bankowości, przemyśle metali szlachetnych, na rynkach walutowych, ect.

Równoległe do rynku transakcji terminowych rozwijał się rynek transakcji opcyjnych⁶. Na początku lat siedemdziesiątych został utworzony centralny rynek obrotu opcjami „Chicago Board Options Exchange (CBOT)”. Powstanie nowej giełdy było inspirowane ideą, iż instrumenty pochodne mogą wyjść poza rynki tradycyjnych towarów. Wejście instrumentów pochodnych na rynek papierów wartościowych nastąpiło gdy „Chicago Board of Trade (CBOT)” zaoferowała pierwsze kontrakty **futures** na papiery wartościowe. Podobnie jak w innych przypadkach opcje i kontrakty **futures** na papiery wartościowe tworzono w celu ograniczenia ryzyka wynikającego z niekorzystnych zmian na rynku, ale również dopuszczalne było wykorzystanie spekulacyjne.

Początek podejścia matematycznego, „matematyki finansowej” datujemy na rok 1946, [6],

⁵ Jeśli oczywiście należał do wąskiego grona producentów, których nie dotknęła klęska.

⁶ Opcja, [7], jest umową między nabywcą (posiadaczem) a sprzedawcą (wystawcą) dającą prawo kupna (opcje kupna) lub sprzedaży (opcja sprzedaży) instrumentu bazowego przed lub w ustalonym dniu w przyszłości po określonej cenie w zamian za opłatę. Prawo związane z opcją kończy się w terminie wygaśnięcia. Opcja jest kontraktem terminowym.

to znaczy na moment ukazania się książki Clarence'a H. Richardsona pt.: „Financial Mathematica” która zawierała deterministyczną teorię instrumentów finansowych, wycenę obligacji oraz stochastyczne podejście do modeli ubezpieczeniowych.

Co prawda rynek papierów wartościowych doczekał się pierwszego modelu stochastycznego już w roku 1900, za sprawą pracy doktorskiej Louisa Bachelier. Do opisu cen akcji na giełdzie zastosował on procesy arytmetycznego ruchu Browna.

Formuła Bacheliera opierała się na 2 podstawowych założeniach:

- stopa procentowa jest zerowa,
- ceny akcji mogą być ujemne.

Rozszerzeniem modelu Bacheliera była teoria wyprowadzona niezależnie przez Paula Samuelsona i M.F.M Osborna. tzw.: „geometryczny ruch Browna”. Dzięki niemu stało się możliwe obliczenie bieżącej ceny papieru wartościowego S_t :

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma B_t}, \quad (1)$$

gdzie S_0 oznacza cenę papieru wartościowego w chwili $t = 0$, μ współczynnik wzrostu, σ współczynnik zmienności, a B_t jest współczynnikiem związanym z ruchami Browna.

W roku 1973 Fischer Black i Mayron Scholes zaproponowali model rynku w postaci dwóch równań:

1. równania deterministycznego i opisującego wartości obligacji lub stan rachunku bankowego ze stałą stopą procentową,
2. stochastycznego równania różniczkowego, opisującego bieżącą cenę akcji,

który pozwalał obliczyć nie tylko sprawiedliwą cenę opcji ale również **uwzględnić strategię zabezpieczającą**. Model ów został w 1997 roku uhonorowany Nagrodą Nobla, w dziedzinie ekonomii [2]. Należy wspomnieć, że nad wyżej wymienioną teorią wraz z Fischerem Blackiem i Mayronem Scholesem pracował również Robert C. Merton. Orginalne prace, wyróżnione Nagrodą Nobla, znajdują się w [1]. Nagrodę otrzymali Robert Merton oraz Myron Scholes. Fischer Black zmarł w roku 1995. Z racji ograniczonej formy eseju, nie przedstawimy pełnego matematycznego wyprowadzenia i dowodu Modelu Blacka-Scholesa. Natomiast w rozdziale „Własności wzorów Blacka-Scholesa”, (4.3), pokażemy przejścia graniczne, które upewniają nas o prawidłowości wzorów (7), (8), i założeń poczynionych przez twórców.

2 A może grzane wino

Spróbujmy zastanowić się nad sensem stosowania modelu „Blacka-Scholesa” oraz jemu podobnych modeli które powstały z modyfikacji założeń poczynionych przez Fischera Blacka i Myrona Scholesa⁷. Skłania nas do tego aparat matematyczny zastosowany w modelu , wzory (7) , (8) , (9) , (10) . Może po prostu nie warto się go uczyć, i uznać powyższy model za czysto akademicki przykład „próby” zastosowania matematyki i fizyki w ekonomii, a „zaoszczędzony” czas poświęcić na spotkanie z przyjaciółmi przy przysłowiowym „grzanym winie”⁸.

⁷Badacze rezygnowali z części założeń poczynionych przez Fischera Blacka i Myrona Scholesa, i tak na przykład przyjęto założenie, iż $\sigma = \sigma(\text{czas})$ oraz $\mu = \mu(\text{czas})$ są funkcjami czasu, lub modyfikowali model tak aby opisywał akcje spółek wypłacających dywidendę.

⁸Autor posiada doskonały i sprawdzony przepis na w.w. „grzane wino”.

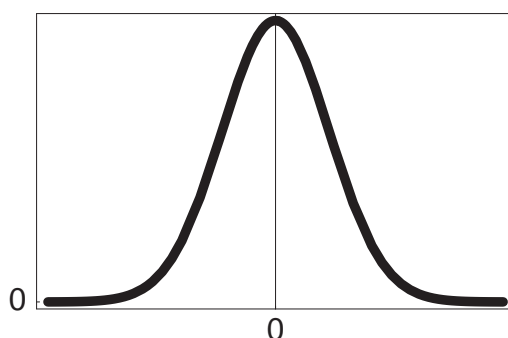
Instrumenty pochodne oraz model „Balcka-Scholesa” będący ich częścią, pozwalają na zastosowanie odpowiednich strategii zabezpieczających. Oto kilka przykładów, [5], [6] do czego może prowadzić niedocenywanie niebezpieczeństw związanych z zastosowaniem instrumentów pochodnych w firmach:

- Rok 1993 Metallgesellschaft AG, strata 1,8 miliarda dolarów renomowanej niemieckiej firmy na kontraktach forward i futures na ropę naftową, [6].
- Rok 1994, Procter & Gamble, strata 102 milionów dolarów, [5],
- Rok 1994, Gibson Greetings, strata 23 milionów dolarów, [5],
- Rok 1994, kalifornijski powiat Orange County, upadłość po poniesieniu straty w wysokości ≈ 1.7 miliarda dolarów, strata na obligacjach komunalnych i hipotecznych. Powodem były zbyt ryzykowne transakcje skarbnika powiatu Boba Citrona, który grał na zniżkę stóp procentowych. Wykorzystując tzw. „dźwignie finansową”⁹ doprowadził do zwielokrotnienia strat, [6].
- Rok 1995, bank „Barings’s Bank”, jedna z najbardziej spektakularnych upadłości, po stracie 1.3 miliarda dolarów na opcjach i kontraktach futures na indeks Nikkei dokonywanych przez Nicka Leeson. Sprawozdanie z przebiegu dochodzenia przed Izbą Gmin można znaleźć w [5]. Był to jeden z najstarszych i cieszących się najlepszą renomą banków angielskich.
- Rok 1996 Sumitomo, strata, źródła podają od 1.8 [5], do 2.6, [6], miliarda dolarów japońskiego banku inwestycyjnego na handlu miedzią. Straty spowodował swoją działalnością makler Yasuo Hamanaki, kupował on znaczne ilości miedzi na rynku gotówkowym i próbował manipulować cenami, i zarabiał na kontraktach futures i wystawianiu pozagiełdowych opcji sprzedaży.
- Rok 1997 Yamaichi Securities, strata 2.1 miliarda dolarów z powodu ukrywania poza bilansem operacji i złych kredytów. Całość zakończyła się upadkiem czwartego co do wielkości domu maklerskiego w Japonii oraz poważnymi problemami finansowymi instytucji i spółek związanych z grupą Yamaichi, [6].
- Rok 1997 Rząd Belgii, strata 1.2 miliarda dolarów, [5].
- Rok 1997 National Westminster Bank strata 143 milionów dolarów, [5].

Jak widzimy, błędne jest przekonanie, iż na rynku instrumentów pochodnych ponoszą straty tylko niedoświadczeni i nierozważni inwestorzy. Straty dotyczą również poważnych instytucji finansowych jakimi w świecie współczesnych finansów są banki, czy rządy państw.

Dane zamieszczone powyżej dobitnie pokazują, jak ważnym elementem w ekonomii są instrumenty pochodne i do czego może prowadzić lekceważenie, czy niedocenywanie ich roli. Dostrzegamy również jak istotną ich częścią może być model „Balcka-Scholesa”, który jak powiedzieliśmy wcześniej, pozwala obliczyć nie tylko sprawiedliwą cenę opcji, ale również uwzględnić strategię zabezpieczającą.

⁹Jest to tylko przykład którym autor nie będzie się zajmował w dalszej części, zainteresowanych odsyła do lektury np. [6]



Rysunek 1: Rysunek ilustruje rozkład normalny.

3 Zarządzanie ryzykiem

Instrumenty pochodne istnieją po, to aby minimalizować ryzyko, zwykle przez przesunięcie niechcianej jego części na spekulantów - śmiałków, którzy mają odwagę na nim zarobić. Przedstawimy w jaki sposób można określić zmienność ceny na podstawie danych historycznych lub na podstawie ceny opcji. Oraz zaprezentujemy wykorzystanie modelu Blacka-Scholesa do wyceny europejskich opcji kupna spółek nie wypłacających dywidendy.

3.1 Rozkład logarytmiczno-normalny

Starając się zminimalizować ryzyko związane z wyceną opcji, dążymy do uzyskania informacji na temat możliwej ceny opcji w określonym czasie w przyszłości. Inaczej [3] można sformułować ten problem następująco: jeśli dziś cena za akcję wynosi 100 \$, to jakie jest prawdopodobieństwo dla cen jutro, za tydzień, za rok. W celu rozwiązania tego problemu dokonany dwu upraszczających założeń:

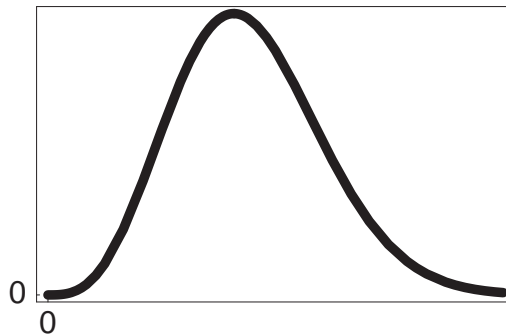
3.1.1 Założenia

- Ceny akcji podlegają błędzeniu przypadkowemu, **random walk**, to znaczy, że dla krótkiego okresu rozkład proporcjonalnych zmian cen akcji ma charakter rozkładu normalnego, rys.(1). W rozkładzie normalnym zmienna może przybierać zarówno wartości dodatnie jak i ujemnie.
- Dla dowolnego przyszłego momentu, ceny mają charakter rozkładu logarytmiczno-normalnego, rys.(2). Jak łatwo zauważyć, zmienna w rozkładzie logarytmiczno-normalnym może przybierać wyłącznie wartości większe od zera.

3.1.2 Parametry

Rozkład logarytmiczno-normalny można opisać dwoma podstawowymi parametrami:

1. μ **oczekiwana stopa zwrotu akcji** jest to wyrażona w **stosunku rocznym** średnia stopa zwrotu osiągnięta przez inwestorów w krótkich okresach.
2. σ **zmienność** to miara naszej niepewności co do przyszłych ruchów ceny akcji, inaczej miara naszej niepewności co do proporcjonalnych zmian. Zazwyczaj przybiera wartości z przedziału 0.2 do 0.4 .



Rysunek 2: Rysunek ilustruje rozkład logarytmiczno-normalny.

W oparciu o założenie o logarytmiczno-normalnym rozkładzie cen akcji możemy obliczyć cenę akcji w przyszłości (w czasie T), oznaczamy ją przez S_T

$$\ln S_T \approx \phi \left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right], \quad (2)$$

gdzie S oznacza aktualną cenę akcji. Przez $\phi \left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$ oznaczyliśmy rozkład normalny o średniej $\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T$, i odchyleniu standardowym $\sigma \sqrt{T}$.

3.2 Przykład

Aby lepiej zrozumieć wzór (2) przeanalizujemy jego wyniki na przykładzie, [3], [4]. Rozważmy akcję, której początkowa cena jest równa $S = 55\$$, oczekiwana stopa zwrotu wynosi 14 % w skali roku tzn. $\mu = 0.14$, zmienność 21 %, tzn. $\sigma = 0.21$. Na podstawie wzoru (2) postaramy się zapisać rozkład prawdopodobieństwa ceny akcji S_T za 9 miesięcy, czyli 3/4 roku.

$$\begin{aligned} \ln S_{3/4} &\approx \phi \left[\ln 55 + \left(0.14 - \frac{0.0441}{2} \right) 0.75, 0.21 \sqrt{0.75} \right] \\ &\approx \phi [4.0958, 0.1819] \end{aligned} \quad (3)$$

Prawdopodobieństwo, że zmienna o rozkładzie normalnym, osiągnie wartość z przedziału ± 1.96 odchylenia standardowego wynosi 95%. Czyli w naszym wypadku możemy stwierdzić, że z 95% pewnością:

$$4.0958 - 1.96 * 0.1819 < \ln S_{3/4} < 4.0958 + 1.96 * 0.1819 \quad (4)$$

co możemy zapisać jako:

$$e^{4.0958 - 1.96 * 0.1819} < S_{3/4} < e^{4.0958 + 1.96 * 0.1819} \quad (5)$$

ostatecznie:

$$42.07 < S_{3/4} < 85.83 \quad (6)$$

Tak więc z 95% prawdopodobieństwem cena akcji za 9 miesięcy znajdować się będzie w przedziale 42.07\$ a 85.83\$.

Jak pokazuje powyższy przykład zakładając logarytmiczno-normalny rozkład cen akcji obliczyliśmy, z prawdopodobieństwem 95%, możliwą cenę za 9 miesięcy. Dzięki tej informacji możemy podjąć szereg działań zabezpieczających i zmniejszających ryzyko finansowe.

4 Model Blacka-Scholesa

Na wstępie należy zaznaczyć, iż model Blacka-Scholesa, ma na celu zminimalizowanie strat związanych z chybionymi transakcjami kupna i sprzedaży. Umożliwia on, również optymalny wybór metody finansowania działalności i efektywne zarządzanie ryzykiem. Dokładniej, model Blacka-Scholesa wyceny opcji na akcję pozwala określić zmienność ceny na podstawie danych historycznych lub na podstawie cen opcji. Należy zauważyć, że formuła Blacka-Scholesa jest poprawna jedynie w sytuacji, gdy krótkoterminowa stopa procentowa r jest stała. W praktyce przyjmuje się, że stopa procentowa jest równa wolnej od ryzyka stopie procentowej dla inwestycji trwającej okres T . Trzeba również zaznaczyć, iż równania Blacka-Scholesa określają jedynie ceny europejskich opcji kupna i opcji sprzedaży. Cena amerykańskich opcji kupna dla spółek nie wypłacających dywidendy jest równa cenie opcji europejskiej. Do jej wyceny możemy więc stosować wzór (7). **Nie** istnieje natomiast dokładny wzór określający wartość amerykańskiej opcji sprzedaży akcji spółek nie wypłacających dywidendy.

4.1 Założenia

Konstruując swój model Fischer Black i Myron Scholes oparli się na następujących założeniach:

1. Ceny akcji zachowują się zgodnie z modelem logarytmiczno-normalnym, opisanym w rozdziale 3.1, a parametry μ , oraz σ są stałe.
2. Wszystkie koszty transakcyjne oraz podatki są pomijane, a papiery wartościowe są doskonale podzielne.
3. W okresie ważności opcji, akcje bazowe dla danego kontraktu nie przynoszą dywidend.
4. Nie istnieją możliwości pozbawionego ryzyka arbitrażu.
5. Obrót papierami wartościowymi jest ciągły.
6. Uczestnicy rynku mogą pożyczać i inwestować środki według tej samej wolnej od ryzyka stopy procentowej.
7. Krótkoterminowa, wolna od ryzyka, stopa procentowa r jest stała.

Jak wcześniej zaznaczono, roz.2, nie jest to jedyny możliwy wybór założeń, i dopuszczalna jest jego modyfikacja.

4.2 Wzory wyceny opcji

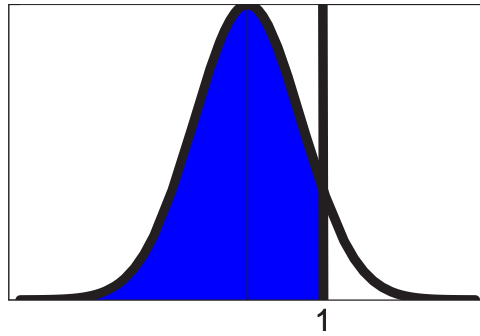
Równania Blacka-Scholesa określające ceny **europejskich** opcji kupna i opcji sprzedaży akcji dla spółek nie wypłacających dywidendy mają postać,[3] , [4] :

Opcja kupna **call option**

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) \quad (7)$$

Opcja sprzedaży **put option**

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (8)$$



Rysunek 3: Rysunek ilustruje $N(y)$.

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (10) \\ &= d_1 - \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

Funkcja $N(y)$ określa prawdopodobieństwo, że zmienna o standardowym rozkładzie normalnym $\phi(0, 1)$, osiągnie wartość mniejszą od y , patrz rys. (3)

Przez S oznaczono obecną cenę akcji, X cenę wykonania, r to wolna od ryzyka stopa procentowa, T czas pozostający do wygaśnięcia opcji, σ to zmienność cen opcji.

Jak wyżej zauważyliśmy, formuła Blacka-Scholesa jest poprawna jedynie w sytuacji, gdy krótkoterminowa stopa procentowa r jest stałą; w praktyce przyjmuje się, że stopa procentowa jest równa wolnej od ryzyka stopie procentowej dla inwestycji trwającej okres T .

4.3 Własności wzorów Blacka-Scholesa

Ograniczona forma eseju nie pozwala na przedstawienie kompletnego dowodu modelu Blacka-Scholesa, zaprezentujemy tylko przejścia graniczne, aby upewnić się o poprawności oraz własnościach wzorów (7), (8). Przyjrzyjmy się przejściom granicznym.

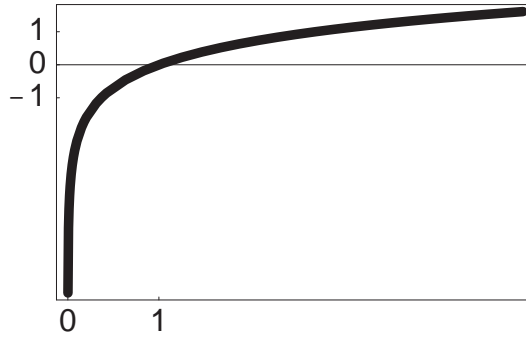
4.3.1 $S \rightarrow \infty$

Wzrastająca cena akcji S do bardzo wysokiego poziomu upewnia nas, że opcja kupna zostanie wykonana.

$$\lim_{S \rightarrow \infty} c \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \infty \\ d_2 \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(d_1) \rightarrow 1 \\ N(d_2) \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow S - Xe^{-rT} \quad (11)$$

Tak więc możemy oczekiwać, że cena opcji kupna będzie równa: $S - Xe^{-rT}$. Wynika to z faktu, że dla dużych wartości S , funkcje d_1 oraz d_2 osiągają duże wartości, a w związku z tym $N(d_1)$ oraz $N(d_2)$ dążą do jedności. Rozumowanie prowadzące do powyższego wyniku przedstawiłem we wzorze (11)

$$\lim_{S \rightarrow \infty} p \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \infty \\ d_2 \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(-d_1) \rightarrow 0 \\ N(-d_2) \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \quad (12)$$



Rysunek 4: Rysunek ilustruje $\log(y)$. Jak wiemy dla argumentów > 1 , funkcja $\log(y) > 0$, podobnie dla argumentów < 1 , funkcja $\log(y) < 0$.

Natomiast dla bardzo wysokiej ceny akcji, cena europejskiej opcji sprzedaży p będzie bliska zeru. Co jest wynikiem faktu, że $N(-d_1)$ oraz $N(-d_2)$ dążą do zera. Rozumowanie prowadzące do powyższego wyniku przedstawiłem we wzorze (12).

4.3.2 $\sigma \rightarrow 0$

Zastanówmy się jakie konsekwencje poniesie za sobą warunek, iż zmienność ceny akcji jest bliska zero. Zbadamy dwa przypadki:

- $S > X$, wówczas korzystając ze wzorów (9),(10),(7),(8), oraz z własności funkcji $\ln(y)$:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} c \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \infty \\ d_2 \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(d_1) \rightarrow 1 \\ N(d_2) \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow S - Xe^{-rT} \quad (13)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} p \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \infty \\ d_2 \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(-d_1) \rightarrow 0 \\ N(-d_2) \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \quad (14)$$

Tak więc wówczas $c = S - Xe^{-rT}$ oraz $p = 0$.

- $S < X$, podobnie jak powyżej korzystając ze wzorów (9),(10),(7),(8), i własności funkcji $\ln(y)$:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} c \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow -\infty \\ d_2 \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(d_1) \rightarrow 0 \\ N(d_2) \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \quad (15)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} p \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow -\infty \\ d_2 \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(-d_1) \rightarrow 1 \\ N(-d_2) \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow Xe^{-rT} - S \quad (16)$$

Pokazaliśmy, że $c = 0$ oraz $p = Xe^{-rT} - S$.

4.3.3 $T \rightarrow 0$

Rozważmy również przejście graniczne $T \rightarrow 0$. Powinniśmy zbadać dwa przypadki:

- $S > X$, wówczas korzystając ze wzorów (9),(10),(7),(8), oraz własności funkcji $\ln(y)$:

$$\lim_{T \rightarrow 0} c \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \infty \\ d_2 \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(d_1) \rightarrow 1 \\ N(d_2) \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow S - X \quad (17)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} p \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \infty \\ d_2 \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(-d_1) \rightarrow 0 \\ N(-d_2) \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \quad (18)$$

Tak więc wówczas $c = S - X$ oraz $p = 0$.

- $S < X$, podobnie jak powyżej korzystając ze wzorów (9),(10),(7),(8), własności funkcji $\ln(y)$:

$$\lim_{T \rightarrow 0} c \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow -\infty \\ d_2 \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(d_1) \rightarrow 0 \\ N(d_2) \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \quad (19)$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} p \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_2 \rightarrow \frac{\ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \rightarrow -\infty \\ d_2 \rightarrow -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(-d_1) \rightarrow 1 \\ N(-d_2) \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow X - S \quad (20)$$

Pokazaliśmy, że $c = 0$ oraz $p = X - S$.

4.4 Przykład

Przedstawmy, [3],[4], przykład „praktycznego” zastosowania „Modelu Blacka-Scholesa” czyli wzorów (7) oraz (8). Rozważmy sytuację, w której cena akcji na dziewięć miesięcy $T = 3/4$ przed wygaśnięciem opcji jest równa $S = 53\$$, cena wykonania opcji wynosi $X = 50\$$, wolna od ryzyka stopa procentowa $r = 10\% = 0.1$, w skali roku, a zmienność cen akcji $\sigma = 20\% = 0.2$, w skali roku.

Wpierw musimy obliczyć wartość funkcji d_1 oraz d_2 . Zgodnie ze wzorami (9) oraz (10) otrzymujemy:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{53}{50}) + (0.1 + \frac{0.04}{2})0.75}{0.2\sqrt{0.75}} = 0.8560 \quad (21)$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{53}{50}) + (0.1 - \frac{0.04}{2})0.75}{0.2\sqrt{0.75}} = 0.6827 \quad (22)$$

Wówczas:

$$d_1 = 0.8560 \Rightarrow \begin{cases} N(d_1) & = 0.80401 \\ N(-d_1) & = 0.19599 \end{cases} \quad (23)$$

$$d_2 = 0.6827 \Rightarrow \begin{cases} N(d_2) & = 0.75264 \\ N(-d_2) & = 0.24736 \end{cases} \quad (24)$$

Stąd, mając (7), (8), łatwo można obliczyć, że:

$$c = 53 * 0.80401 - 50e^{-0.1*0.75} * 0.75264 \quad (25)$$

$$p = 50e^{-0.1*0.75} * 0.24736 - 53 * 0.19599 \quad (26)$$

Czyli ostatecznie:

$$c \approx 7.7 \quad (27)$$

$$p \approx 1.1 \quad (28)$$

stąd:

$$X + c \approx 57.7 \quad (29)$$

$$X - p \approx 48.9 \quad (30)$$

Czyli, aby nabywca opcji osiągnął próg rentowności obecna cena S akcji musi wzrosnąć o 4.7\$. Dla opcji sprzedaży próg rentowności zostanie osiągnięty jeśli obecna cena S akcji spadnie 4.1\$. Dalsze przykłady można znaleźć w pozycjach [3], [4].

Na podstawie powyższych danych możemy starać się ograniczyć ryzyko finansowe związane z błędnymi zakupami bądź sprzedażą akcji. Możemy również lepiej kontrolować zakupy dokonywane przez maklerów i ustrzec się przed błędnym oszacowaniem ceny kupna bądź sprzedaży akcji. W takim sensie model Blacka-Scholesa pozwala nam uwzględnić strategię zabezpieczającą w firmie.

5 Podsumowanie

Powyższa praca ma na celu zaprezentowanie Modelu Blacka-Scholesa, który jako element Inżynierii Finansowej odgrywa niebagatelną rolę w efektywnym zarządzaniu ryzykiem. Jak wspomnieliśmy w rozdziale 4, równania (7) , (8), Blacka-Scholesa określają jedynie ceny europejskich opcji kupna i opcji sprzedaży natomiast nie odnoszą się do amerykańskiej opcji kupna, ponieważ nie istnieje dokładny wzór określający wartość amerykańskiej opcji sprzedaży akcji spółek nie wypłacających dywidendy. Praca oparta jest na założeniach, jakie poczynili Fischer Black i Myron Scholes, roz.4, nie oznacza to jednak, że nie jest możliwa modyfikacja wyżej wymienionych założeń, o czym wspomniano w roz. 2.

Przykłady zamieszczone w pracy roz. 3.2, oraz roz. 4.4, i części literaturowej [3], oraz [4], pozwalają lepiej zrozumieć zastosowania praktyczne omawianej teorii.

Pragnę podkreślić, iż wyżej wymieniona teoria ma na celu zminimalizowanie strat związanych z chybionymi transakcjami kupna i sprzedaży.

Nad wyżej wymienioną teorią prócz Fischera Blacka i Myrona Scholesa [2] pracował również Robert C. Merton [2]. A ich wspólny wysiłek został uhonorowany Nagrodą Nobla w dziedzinie ekonomii¹⁰ w roku 1997, która jest najlepszą rekomendacją dla ich pracy.

¹⁰Niestety śmierć Fischera Blacka w roku 1995, spowodowała iż nagrodę otrzymali tylko Myron Scholes oraz Robert C. Merton.

Bibliografia

- [1] Fischer Black , Mayron Scholes
„ *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* ”
Journal of Political Economy 81 (1973).
Robert C. Merton
„ *Theory of Rational Option Pricing*”
Bell Journal of Economics and Management Science 4 (1973)
- [2] Strony „Komitetu Noblowskiego”
<http://www.nobelprizes.com/nobel/economics/1997a.html>
<http://www.nobelprizes.com/nobel/economics/1997b.html>
Strona „American Mathematical Society”
<http://www.ams.org/new-in-math/nobel1997econ.html>
- [3] John C. Hull
„ *Options, futures, and other derivatives* ”
Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 2000.
- [4] John C. Hull
„ *Kontrakty terminowe i opcje, wprowadzenie.*”
Warszawa, WIG-Press, 1997.
- [5] Philip MacBride Jonson.
„ *Instrumenty pochodne. Przewodnik menedżera.*”
Warszawa : WIG-Press, 2001.
- [6] Aleksander Weron, Rafał Weron
„ *Inżynieria finansowa, wycena instrumentów pochodnych , symulacje komputerowe statystyka rynku.* ”
Wydaw. Naukowo-Techniczne, 1999.
- [7] Waldemar Tarczyński, Marek Zwolankowski
„ *Inżynieria finansowa ,instrumentarium, strategie, zarządzanie rynkiem.*”
Warszawa, Agencja Wydaw. Placet, 1999.