

Technologie informacyjne i komunikacyjne

Temat IV. *Mathematica*

Zadania.

Podstawy.

Zad. 1.

Oblicz wartość $\sqrt{2}$ z dokładnością do 100 cyfr w zapisie dziesiętnym.

Zad. 2.

Rozwiń: a) $(a + b)^5$, b) $(a + b + c)^7$.

Zad. 3.

Zapisz w postaci iloczynowej $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

Równania

Zad. 4.

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 24 = 0.$$

Zad. 5.

Wyznacz, w zależności od parametru m , wszystkie rozwiązania równania

$$x^4 + mx^2 + 9 = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Zad. 6.

Znajdź wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 2x - 3y + 2z = 14, \\ 3x + y - z = -2. \end{cases}$$

Zad. 7.

Znajdź, w zależności od parametrów a i b , wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + 2y + az = 0, \\ bx - 4y - z = 0, \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Zad. 8.

Znajdź numerycznie rozwiązanie równania

$$x^7 - 7x + 9 = 0$$

leżące w przedziale $[-2, -1]$.

Zad. 9.

Znajdź numerycznie rozwiązanie równania

$$\sin(x^2) = x^3$$

leżące w przedziale $[0, 5; 1]$.

* Równania zespolone

Zad. 10.

Znajdź rozwiązania równania

$$z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0.$$

Zad. 11.

Znajdź rozwiązania równania

$$z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i.$$

Zad. 12.

Znajdź rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} (1 + i)z_1 + (1 - i)z_2 = 1 + i \\ (1 - i)z_1 + (1 + i)z_2 = 1 + 3i \end{cases}.$$

Analiza

Zad. 13.

Oblicz granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[100]{n^{100} + n^{99}} - n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\left(1 + \frac{p}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{q}{n}\right)^p \right]$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6}$

Zad. 14.

Oblicz pochodną wielomianu

$$f(x) = ax^5 + (b + 1)x^3 + 7x + 1.$$

Zad. 15.

Niech

$$f(x) = x^2 \cos 2x.$$

Oblicz $f^{(10)}(x)$ oraz $f^{(10)}(0)$.

Zad. 16.

Oblicz całki nieoznaczone: 1.

$$\int (x^2 - 2x + 3) e^x dx$$

2.

$$\int \sqrt{x} (\log x)^2 dx$$

3.

$$\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

4.

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x - x^2}} dx$$

5.

$$\int \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 4} dx$$

Zad. 17.

Oblicz całki oznaczone: 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dx$$

2.

$$\int_1^{\infty} \frac{x \log^3 x}{x^4 + 1} dx$$

Zad. 18.

Sprawdź, że funkcja f spełnia równanie Laplace'a

$$0 = \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

a) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

b) $f(x, y) = \sin x \cosh y$

c) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

Zad. 19.

Oblicz sumy:

a)

$$S(n) = 1 + 2 + \dots + n$$

b)

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

c)

$$S(n) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

Zad. 20.

Rozważmy funkcję

$$f(x) = ax + \frac{b}{1+x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Wykonaj następujące polecenia:

a) wyznacz:

i) $f'(x)$ – pochodną funkcji $f(x)$,

ii) $\int_1^3 f(x) dx$ – całkę oznaczoną funkcji $f(x)$ w granicach od 1 do 3,

iii) pierwsze trzy wyrazy rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg Taylora wokół $x = x_0$,

- b) znajdź ekstrema lokalne funkcji $f(x)$ oraz jej wartości w tym ekstremach,
 c) oblicz granice jednostronne funkcji $f(x)$, gdy $x \rightarrow -1$ i sprawdź, czy funkcja ma tam asymptotę pionową,
 d) wyznacz prawostronną asymptotę ukośną funkcji $f(x)$, czyli prostą

$$y = mx + k, \quad \text{gdzie} \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx),$$

- e) przyjmij $a = 1,3$ i $b = 12$, a następnie wykonaj rysunek, na którym przedstawisz we wspólnym układzie współrzędnych: wykres funkcji $f(x)$ – żółta linia ciągła, punkty odpowiadający ekstremom funkcji $f(x)$ – niebieskie kropki, asymptoty funkcji $f(x)$ – czerwone linie przerywane, dla $x \in [-3; 5]$; umieść na rysunku tytuł zawierający wzór funkcji.

Macierze

Zad. 21.

Dana jest macierz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Oblicz jej wyznacznik, ślad, macierz odwrotną, macierz transponowaną oraz wyznacz jej wektory i wartości własne.

Zad. 22.

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix}.$$

Wyznacz macierz $P = AB$ (tzn. macierz P będącą iloczynem macierzy A i B), a następnie znajdź wyznacznik, wartości własne i wektory własne macierzy P .

Zad. 23.

Oblicz A^{-1} i AA^{-1} , gdy

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Zad. 24.

Oblicz

a)

$$e \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\log \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

* Równania różniczkowe

Zad. 25.

Rozwiąż równania. Sprawdź otrzymane rozwiązania.

a) $y' \cos x - y \sin x = 2x$

b) $y' + \sin y + x \cos y + x = 0$

c) $2yy'' - 2y'^2 + y^2 = 0$

d) $yz'_x - xz'_y = (y - x)z$

Wykresy

Zad. 26.

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sin x$ dla $x \in [0, \pi]$.

Zad. 27.

Narysuj wykres funkcji $f(x, y) = \sin x \cos y$ dla $x, y \in [-\pi, \pi]$.

Zad. 28.

Narysuj krzywą $\gamma(t) = (\cos 5t, \sin 3t)$ dla $t \in [0, 2\pi]$.

Zad. 39.

Narysuj zbiór punktów spełniających równanie $x^2 + y^2 = 9$.