Powtórka - liczby w pamięci komputera

Liczby całkowite

Liczby naturalne

Liczby zapisujemy w systemie pozycyjnym - zazwyczaj jako potęgi liczby 10

```
3 * 10^2 + 9 * 10^1 + 2 * 10^0
```

W informatyce - stosuje się system dwójkowy

In[∘]:=
```
1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0
```

- Zakres: 0 do $2^{\text{liczba bitów}}$-1

In[∘]:=
```
BaseForm[153, 2]
```

Out[∘]//BaseForm=

10011001_2

Liczby całkowite

Liczby ujemne

kod uzupełnień do dwóch:

In[ ]:=

```
0*(-2^6) + 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0
```

Out[ ]=

42

przepis na “-42”: zamień wszystkie bity na przeciwne i dodaj 1

In[ ]:=

```
1*(-2^6) + 0 * 2^5 + 1 * 2^4 + 0 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 + 1
```

Out[ ]=

-42

- jednoznaczne zero

Liczby zmiennoprzecinkowe

- W systemie dziesiętnym 454.574=

In[ ]:=
```
N[4 * 10^2 + 5 * 10^1 + 4 * 10^0 + 5 * 10^-1 + 7 * 10^-2 + 4 * 10^-3]
```
Out[ ]=
```
454.574
```

Ale też 1/3

$= 0 * 10^{0} + 3 * 10^{-1} + 3 * 10^{-2} + 3 * 10^{-3} + ...$

- W systemie binarnym 12.625 =

In[ ]:=
```
N[1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 + 1 * 2^-1 + 0 * 2^-2 + 1 * 2^-3 ]
```
In[ ]:=
```
BaseForm[13.625, 2]
```
Out[ ]//BaseForm=

1101.101_{2}

Ale 0.1 =

In[ ]:=
```
BaseForm[0.1, 2]
```
Out[ ]//BaseForm=

$0.0001100110011001100110 1_{2}$

In[ ]:=
```
N[0 * 2^-1 + 0 * 2^-2 + 0 * 2^-3 + 1 * 2^-4 + 1 * 2^-5 + 0 * 2^-6 + 0 * 2^-7 +
  1 * 2^-8 + 1 * 2^-9 + 0 * 2^-10 + 0 * 2^-11 + 1 * 2^-12 + 1 * 2^-13 + 0 * 2^-14 + 0 * 2^-15 +
  1 * 2^-16 + 1 * 2^-17 + 0 * 2^-18 + 0 * 2^-19 + 1 * 2^-20 + 1 * 2^-21 + 0 * 2^-22 + 1 * 2^-23, 10]
```

Liczby zmiennoprzecinkowe: IEEE 754

Reprezentacja liczb: $\pm$mantysa * 2^{cecha}

In[ ]:=
```
BaseForm[145.1135, 2]
```

Out[ ]//BaseForm=

$1.0010001000111010001_2 \times 2^7$

In[ ]:=
```
rand = RandomChoice[{0, 1}, 32];
Graphics[Table[{EdgeForm[Black], If[i == 0, FaceForm[Red],
     If[i > 0 && i < 9, FaceForm[Green], FaceForm[Yellow]]], Rectangle[{i, 0}, {i + 1, 1}],
    Black, Text[ToString[rand[[i + 1]]], {i + 0.5, 0.5}]}, {i, 0, 31}], ImageSize → Full]
```

Out[ ]=

0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1

In[ ]:=
```
 If[rand[[1]]==1,sign =-1,sign =1]
wykladnik = Total[Table[rand[[2+i]]*2^(7-i),{i,0,7}]]-127
mantysa = 1+N@Total[Table[rand[[10+i]]*2^(-i-1),{i,0,22}]]
N[sign*mantysa * 2^wykladnik]
```

Out[ ]=

1

Out[ ]=

-9

Out[ ]=

1.07634

Out[ ]=

0.00210223

- Przypadki specjalne
  - 0^+

Out[ ]=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

  - 0^-

Out[ ]=

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- $\pm\infty$ (mantysa = same zera)

Out[ ]=

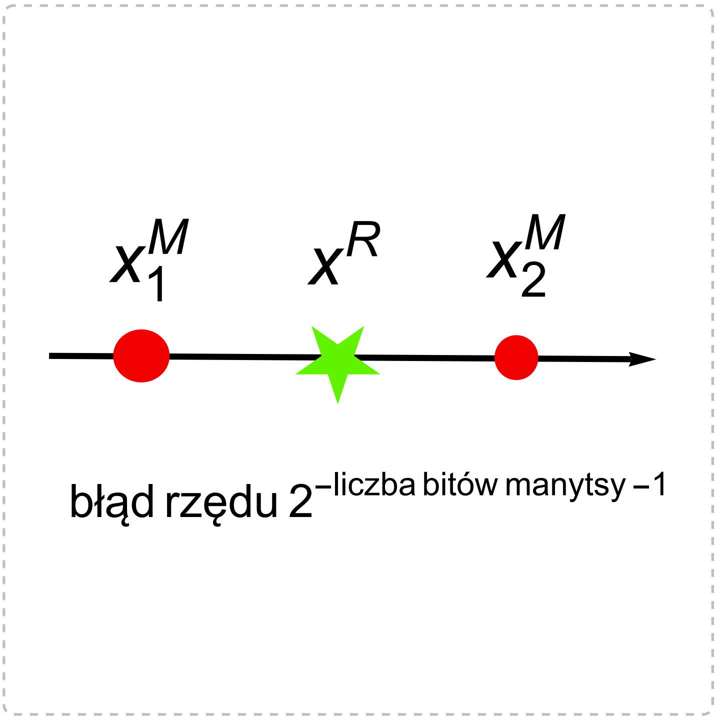
±1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

- NaN (mantysa może być niezerowa)

Out[∘]=

±1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1

Liczba maszynowa vs liczba rzeczywista



In[∘]:= N[2^-24]

5.96046×10^{-8}

Błąd względny i bezwzględny

Błąd bezwzględny: $|x - x_p|$ (x_p: przybliżenie liczby x)

Błąd względny: $\frac{|x-x_p|}{x}$

Przykład: wzór Stirlinga: $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

In[ ]:=

$$\text{stir}[n\_] := \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{E}\right)^n$$

In[ ]:=

```
m = 100
N[m!]
N[stir[m]]
Abs[N[m!] - N[stir[m]]] / N[m!] * 100 (*błąd względny*)
Abs[N[m!] - N[stir[m]]] (*błąd bezwzględny*)
```

Out[ ]=

100

Out[ ]=

9.33262×10^{157}

Out[ ]=

9.32485×10^{157}

Out[ ]=

0.0832983

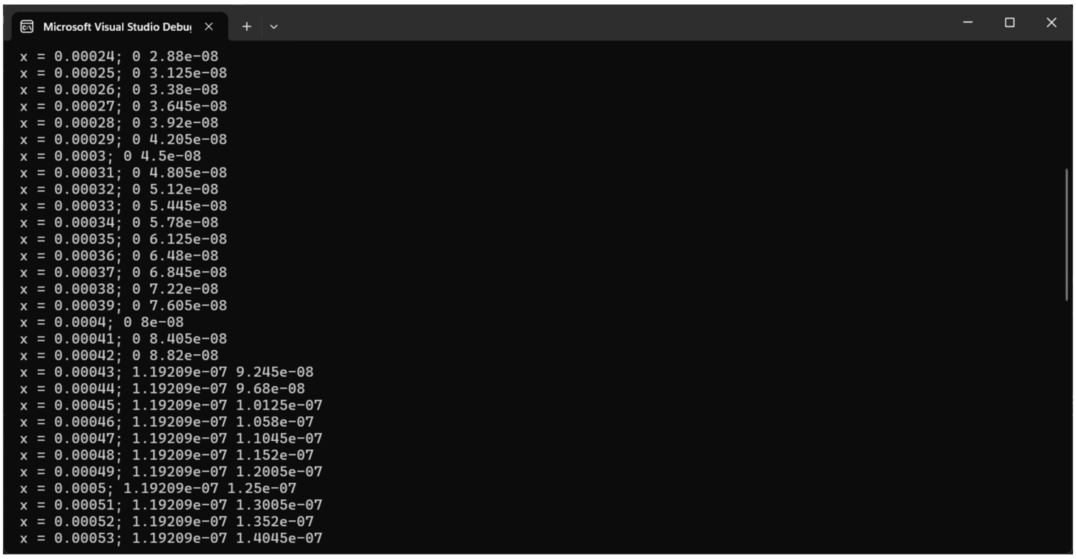
Out[ ]=

7.77392×10^{154}

Utrata liczb znaczących

Należy być też ostrożnym przy odejmowaniu bliskich sobie wartości.

$$\sqrt{x^2+1}-1 \text{ vs } \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$




```
(*Mathematica jest na tyle inteligentna, że sobie poradzi z takim problemem*)
```

Kod źródłowy w C++

```
#include < iostream >
#include < cmath >

float f1 (float x) {
        return std::sqrtf (x*x + 1) − 1;
        }

float f2 (float x) {
        return x*x/(std::sqrtf (x*x + 1) + 1);
        }

int main () {
        float val {}, step = 0.00001;
        for (int i = 0; i < 100; i++) {
                val = step*i;
        std::cout << " x = " << val << "; " << f1 (val) << " " << f2 (val) << std::endl;
        }
    return 0;
        }
```

Możemy też skorzystać z szeregu Taylora:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)\,(x-c)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-c)^{n+1}.$$

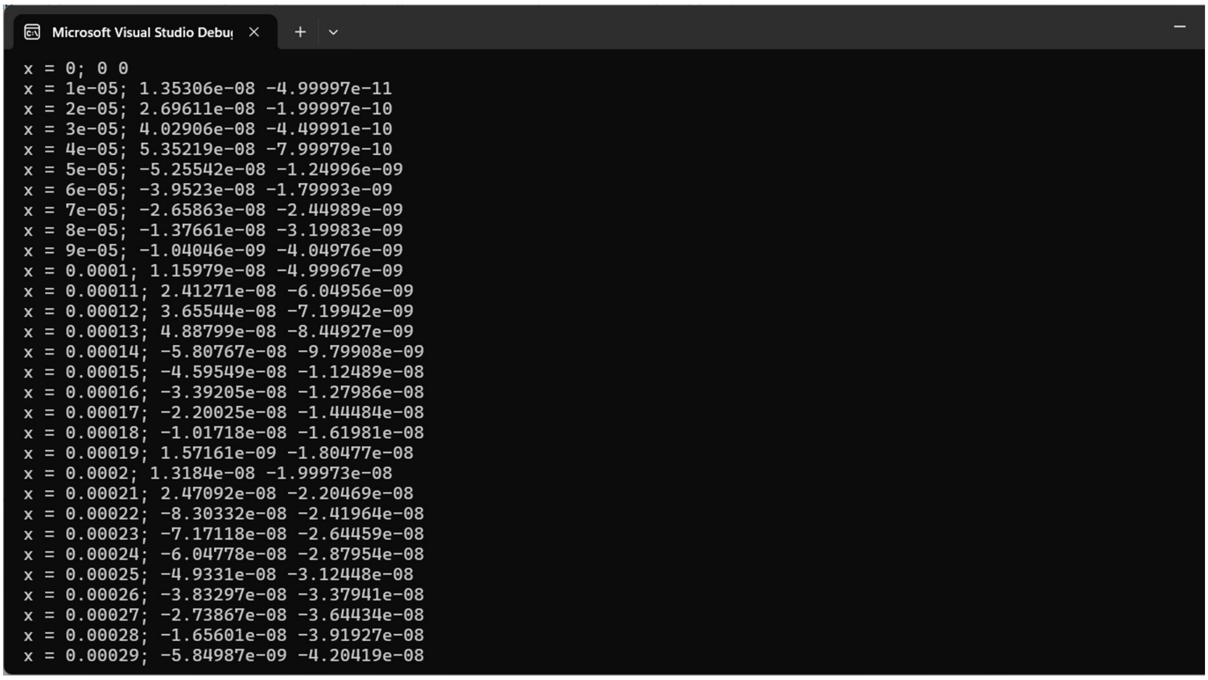
Obliczyć wartość wyrażenia Log[x+1]-x dla x bliskich zera .

In[∘]:=

```
Normal[Series[Log[x+1]-x,{x,0,5}]]
```

Out[∘]=

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$$



Microsoft Visual Studio Debu

```
x = 0; 0 0
x = 1e-05; 1.35306e-08 -4.99997e-11
x = 2e-05; 2.69611e-08 -1.99997e-10
x = 3e-05; 4.02906e-08 -4.49991e-10
x = 4e-05; 5.35219e-08 -7.99979e-10
x = 5e-05; -5.25542e-08 -1.24996e-09
x = 6e-05; -3.9523e-08 -1.79993e-09
x = 7e-05; -2.65863e-08 -2.44989e-09
x = 8e-05; -1.37661e-08 -3.19983e-09
x = 9e-05; -1.04046e-09 -4.04976e-09
x = 0.0001; 1.15979e-08 -4.99967e-09
x = 0.00011; 2.41271e-08 -6.04956e-09
x = 0.00012; 3.65544e-08 -7.19942e-09
x = 0.00013; 4.88799e-08 -8.44927e-09
x = 0.00014; -5.80767e-08 -9.79908e-09
x = 0.00015; -4.59549e-08 -1.12489e-08
x = 0.00016; -3.39205e-08 -1.27986e-08
x = 0.00017; -2.20025e-08 -1.44484e-08
x = 0.00018; -1.01718e-08 -1.61981e-08
x = 0.00019; 1.57161e-09 -1.80477e-08
x = 0.0002; 1.3184e-08 -1.99973e-08
x = 0.00021; 2.47092e-08 -2.20469e-08
x = 0.00022; -8.30332e-08 -2.41964e-08
x = 0.00023; -7.17118e-08 -2.64459e-08
x = 0.00024; -6.04778e-08 -2.87954e-08
x = 0.00025; -4.9331e-08 -3.12448e-08
x = 0.00026; -3.83297e-08 -3.37941e-08
x = 0.00027; -2.73867e-08 -3.64434e-08
x = 0.00028; -1.65601e-08 -3.91927e-08
x = 0.00029; -5.84987e-09 -4.20419e-08
```

In[∘]:=

```
Table[{N@x, N[Log[x + 1] - x]}, {x, 10^-5, 0.00029, 10^-5}]
```

Out[∘]=

$\{\{0.00001, -4.99996\times10^{-11}\}, \{0.00002, -1.99997\times10^{-10}\},$
$\{0.00003, -4.49991\times10^{-10}\}, \{0.00004, -7.99979\times10^{-10}\}, \{0.00005, -1.24996\times10^{-9}\},$
$\{0.00006, -1.79993\times10^{-9}\}, \{0.00007, -2.44989\times10^{-9}\}, \{0.00008, -3.19983\times10^{-9}\},$
$\{0.00009, -4.04976\times10^{-9}\}, \{0.0001, -4.99967\times10^{-9}\}, \{0.00011, -6.04956\times10^{-9}\},$
$\{0.00012, -7.19942\times10^{-9}\}, \{0.00013, -8.44927\times10^{-9}\}, \{0.00014, -9.79909\times10^{-9}\},$
$\{0.00015, -1.12489\times10^{-8}\}, \{0.00016, -1.27986\times10^{-8}\}, \{0.00017, -1.44484\times10^{-8}\},$
$\{0.00018, -1.61981\times10^{-8}\}, \{0.00019, -1.80477\times10^{-8}\}, \{0.0002, -1.99973\times10^{-8}\},$
$\{0.00021, -2.20469\times10^{-8}\}, \{0.00022, -2.41965\times10^{-8}\}, \{0.00023, -2.64459\times10^{-8}\},$
$\{0.00024, -2.87954\times10^{-8}\}, \{0.00025, -3.12448\times10^{-8}\}, \{0.00026, -3.37941\times10^{-8}\},$
$\{0.00027, -3.64434\times10^{-8}\}, \{0.00028, -3.91927\times10^{-8}\}, \{0.00029, -4.20419\times10^{-8}\}\}$

```
(*Mathematica znowu sobie radzi*)
```

Oblicz wartość funkcji sinus dla argumentu typu float (4 bajty) x = 24684.1516

Mathematica daje wynik:

In[ ]:=
```
N[Sin[24684.1516]]
```
Out[ ]=
```
-0.611631
```

W C++ funkcja: std::sin(24684.1516f) daje -0.612219

- Rozwiązania problemu:
  - użyć zmiennej o większej dokładności (double’a): std::sin(24684.1516) = -0.611631
  - Wykorzystać periodyczność funkcji sinus: $24684.1516 = 3928 * 2\pi + 3.7997$ =>std::sin(3.7997f) = -0.611621

In[ ]:=
```
Mod[24684.1516, 2π]
```
Out[ ]=
```
3.79971
```

Znaj swoje szeregi

Spróbujmy obliczyć liczbę π z dokładnością do piątego miejsca po przecinku

Sposób naiwny: $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ więc $\pi = \sqrt{6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$

In[∘]:=
```
AbsoluteTiming@N[Sqrt[6 * Sum[1/i^2, {i, 1, 100000}]], 10]
N[π, 10]
Abs[N[π, 10] - N[Sqrt[6 * Sum[1/i^2, {i, 1, 100000}]], 10]]
```

Out[∘]=
{3.92185, 3.141583104}

Out[∘]=
3.141592654

Out[∘]=
9.549×10^{-6}

Sposób lepszy: $\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!}{(k!)^4} \frac{26390k + 1103}{396^{4k}}$

In[∘]:=
```
N[π, 40]
AbsoluteTiming@N[1 / Sum[(2 Sqrt[2])/99^2 (4 k)!/(k!)^4 * (26390 k + 1103)/396^(4 k), {k, 0, 10}], 40]
Abs[N[π, 40] - N[1 / Sum[(2 Sqrt[2])/99^2 (4 k)!/(k!)^4 * (26390 k + 1103)/396^(4 k), {k, 0, 3}], 40]]
```

Out[∘]=
3.141592653589793238462643383279502884197

Out[∘]=
{0.0007701, 3.141592653589793238462643383279502884197}

Out[∘]=
$5.2388963 \times 10^{-32}$

Inny szereg: $\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{4k+1} + \frac{2}{4k+2} + \frac{1}{4k+3}\right)$

In[ ]:=

$$\text{AbsoluteTiming}\left[N\left[\text{Sum}\left[\frac{(-1)^k}{4^k}\left(\frac{2}{4k+1}+\frac{2}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}\right), \{k, 0, 10\}\right], 10\right]\right]$$

$$\text{Abs}\left[N[\pi, 10] - N\left[\text{Sum}\left[\frac{(-1)^k}{4^k}\left(\frac{2}{4k+1}+\frac{2}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}\right), \{k, 0, 10\}\right], 10\right]\right]$$

Out[ ]=

{0.0001779, 3.141592675}

Out[ ]=

2.1×10^{-8}

2.1×10^{-8}

Ciekawostka - mnożenie macierzy

Mnożenie jest "droższe" od dodawania

In[ ]:=
```
A = (a1 a2
     a3 a4)
B = (b1 b2
     b3 b4)
A.B
```

Out[ ]=
```
{{a1, a2}, {a3, a4}}
```

Out[ ]=
```
{{b1, b2}, {b3, b4}}
```

Out[ ]=
```
{{a1 b1 + a2 b3, a1 b2 + a2 b4}, {a3 b1 + a4 b3, a3 b2 + a4 b4}}
```

Algorytm Strassena

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22}); \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22}) \times B_{11}; \\
M_3 &= A_{11} \times (B_{12} - B_{22}); \\
M_4 &= A_{22} \times (B_{21} - B_{11}); \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12}) \times B_{22}; \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12}); \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22}),
\end{aligned}$$

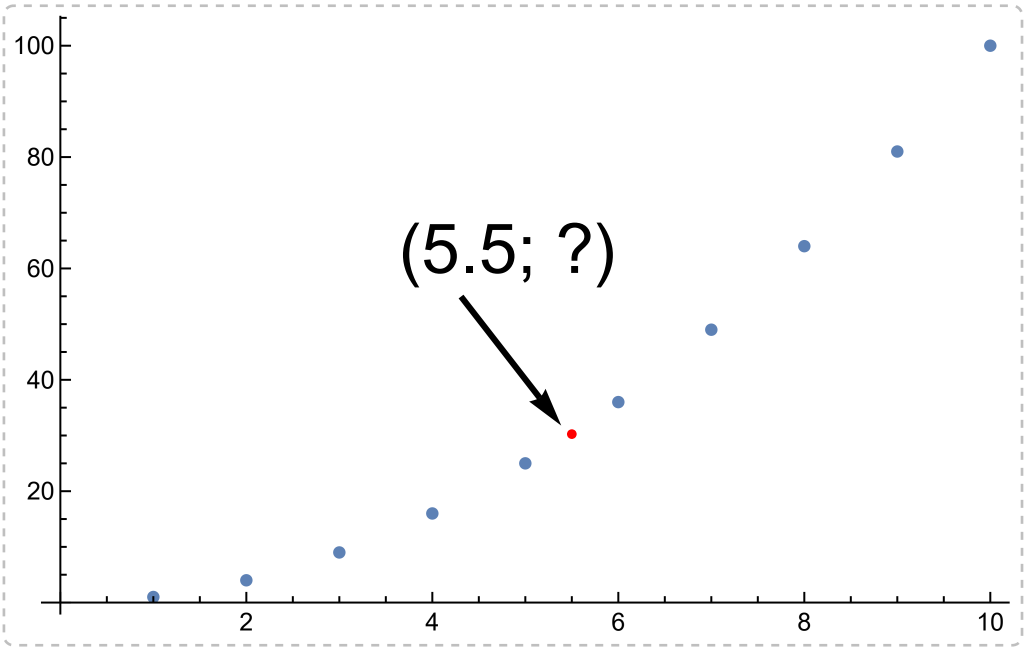
$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{bmatrix}$$

Dla macierzy 4x4 algorytm Strassena potrzebuje 49 mnożeń.
AlphaTensor znalazł(?a) sposób z 47 mnożeniami

Interpolacja i ekstrapolacja

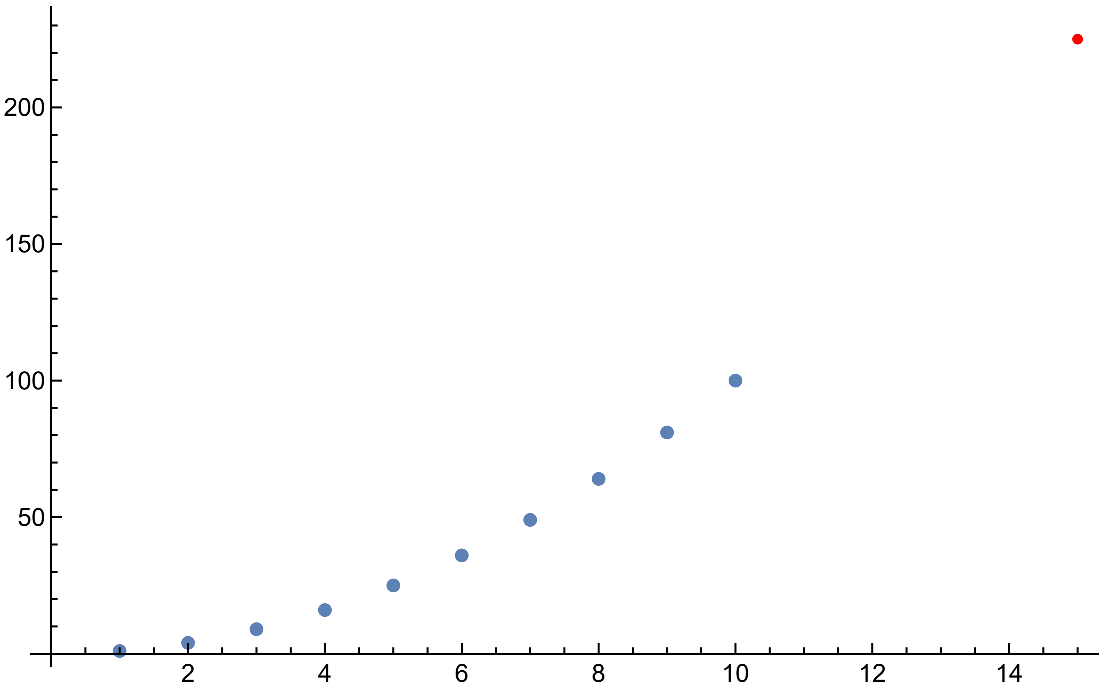
Interpolacja - znajdowanie nowych wartości dla znanego zbioru danych

In[ ]:=
```
Show[{ListPlot[Table[i^2, {i, 1, 10}]],
  Graphics[{PointSize[0.01], Red, Point[{5.5, 5.5^2}]}]},
 LabelStyle → {13, GrayLevel[0]}]
```



Ekstrapolacja - znajdowanie nowych wartości dla znanego zbioru danych, ale poza zakresem danych

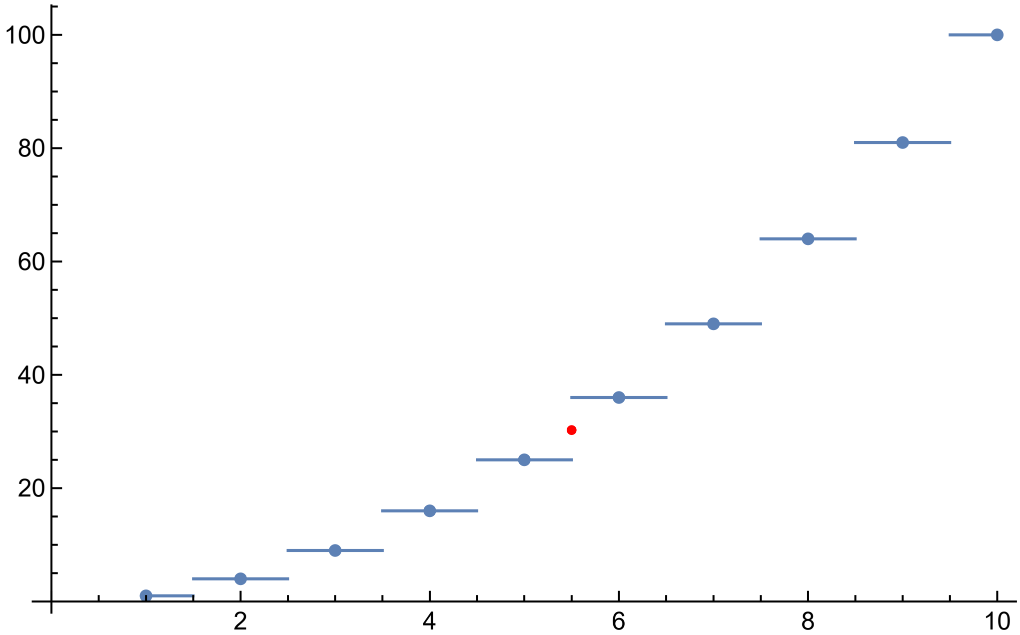
Out[ ]=



Interpolacja stała - wartość pomiędzy punktami jest taka sama jak najbliższego elementu

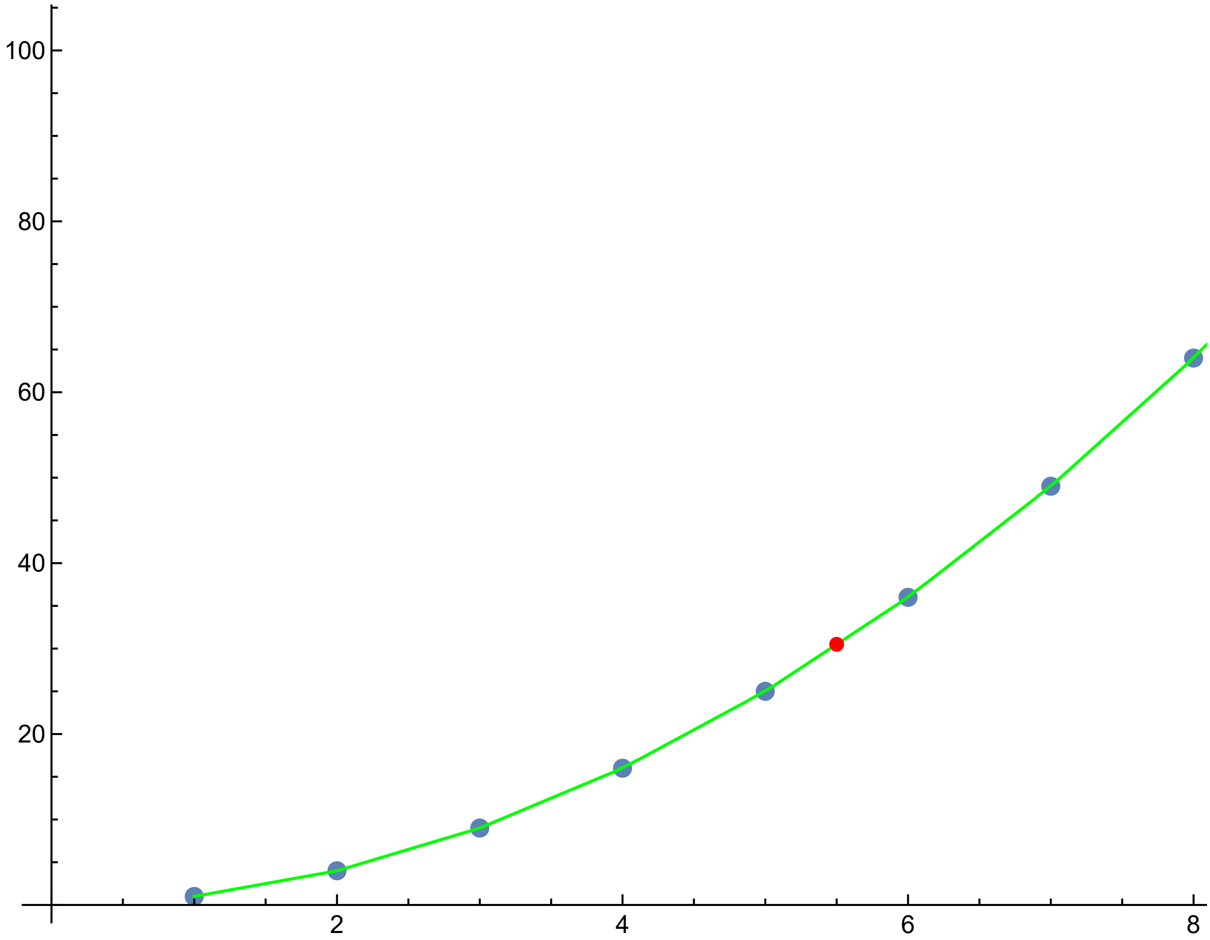
In[ ]:=
```
Show[{ListPlot[Table[i^2, {i, 1, 10}]], Plot[Ceiling[x - .5]^2, {x, 1, 10}],
  Graphics[{PointSize[0.01], Red, Point[{5.5, 5.5^2}]}]},
 LabelStyle → {13, GrayLevel[0]}]
```

Out[ ]=



Interpolacja liniowa - przybliżamy wartość funkcji między dwoma punktami funkcją liniową

Out[ ]=



Znajdźmy wartość funkcji dla x = 5.5

Znamy wartości funkcji f dla f(5) = 25 oraz f(6) = 36. Znajdujemy prostą przechodzącą przez oba punkty:

In[ ]:=

```
line=SolveValues[ { 25 == a * 5 + b, 36 == a * 6 + b   },{a,b}][[1]]
```

Out[ ]=

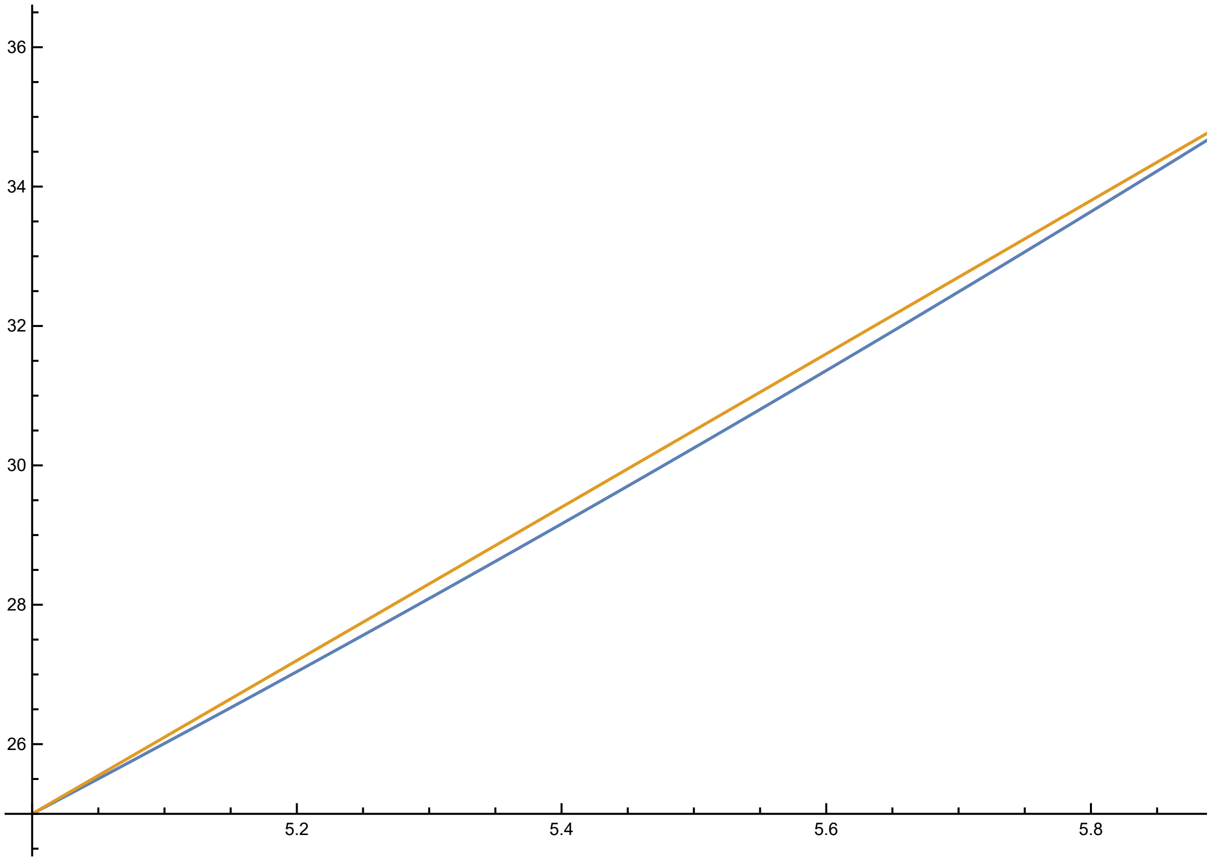
```
{11, -30}
```

Więc nasza interpolacja dla x∈ [a,b] to y = 11 x - 30. Dla x = 5.5, y = 30.5 (prawdziwa wartość to 30.25).

In[ ]:=

```
Plot[{x^2, 11 x - 30}, {x, 5, 6}]
```

Out[ ]=



Interpolacja wielomianowa

Interpolacja Lagrange'a

Wielomianem Lagrange'a nazywamy wielomian $L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j * l_j(x)$, gdzie $l_j(x) = \prod_{\substack{0\le m\le k \\ m\neq j}} \frac{x-x_m}{x_j-x_m}$

Przykład: znajdź wielomian Lagrange'a dla podanych 4 punktów:

In[∘]:=
```
{x0, y0} = {0, 2};
{x1, y1} = {0.5, 1.125};
{x2, y2} = {1.5, -0.625};
{x3, y3} = {3, 8};
```

In[∘]:=

$$l0 = \frac{x - x1}{x0 - x1}\,\frac{x - x2}{x0 - x2}\,\frac{x - x3}{x0 - x3}$$

$$l1 = \frac{x - x0}{x1 - x0}\,\frac{x - x2}{x1 - x2}\,\frac{x - x3}{x1 - x3}$$

$$l2 = \frac{x - x0}{x2 - x0}\,\frac{x - x1}{x2 - x1}\,\frac{x - x3}{x2 - x3}$$

$$l3 = \frac{x - x0}{x3 - x0}\,\frac{x - x1}{x3 - x1}\,\frac{x - x2}{x3 - x2}$$

```
L = y0 * l0 + y1 * l1 + y2 * l2 + y3 * l3
Simplify[L]
```

Out[∘]=
0.444444 (3 - x) (-1.5 + x) (-0.5 + x)

Out[∘]=
0.8 (-3 + x) (-1.5 + x) x

Out[∘]=
-0.444444 (-3 + x) (-0.5 + x) x

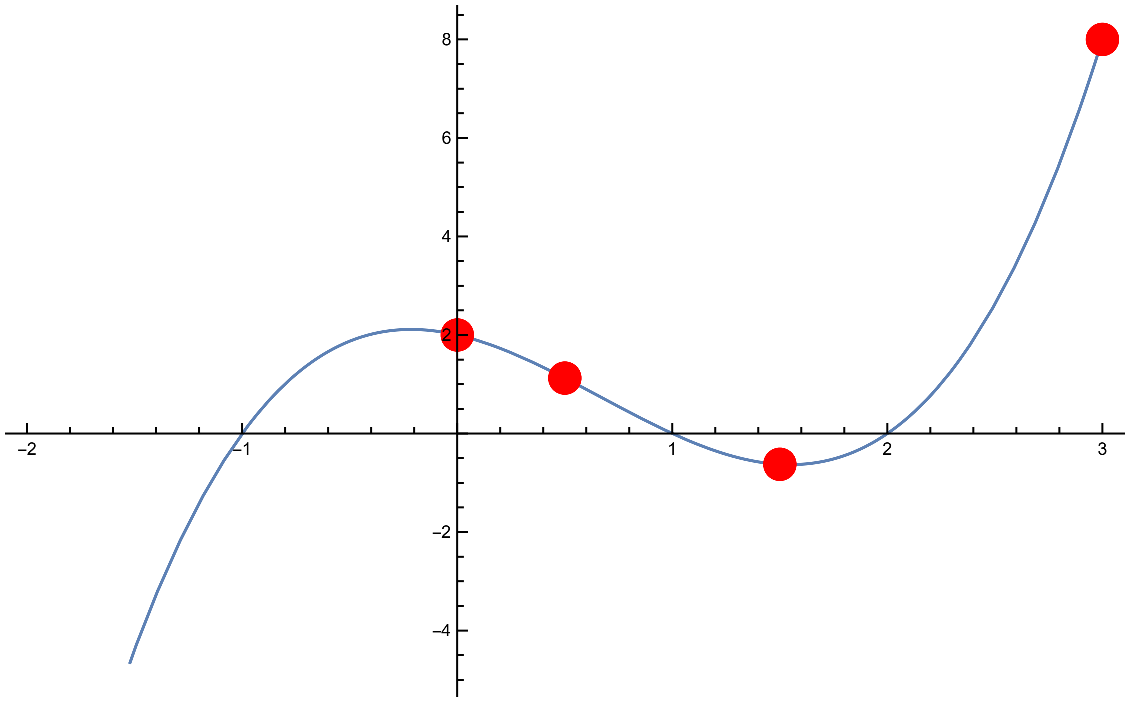
Out[∘]=
0.0888889 (-1.5 + x) (-0.5 + x) x

Out[∘]=
0.888889 (3 - x) (-1.5 + x) (-0.5 + x) + 0.9 (-3 + x) (-1.5 + x) x +
0.277778 (-3 + x) (-0.5 + x) x + 0.711111 (-1.5 + x) (-0.5 + x) x

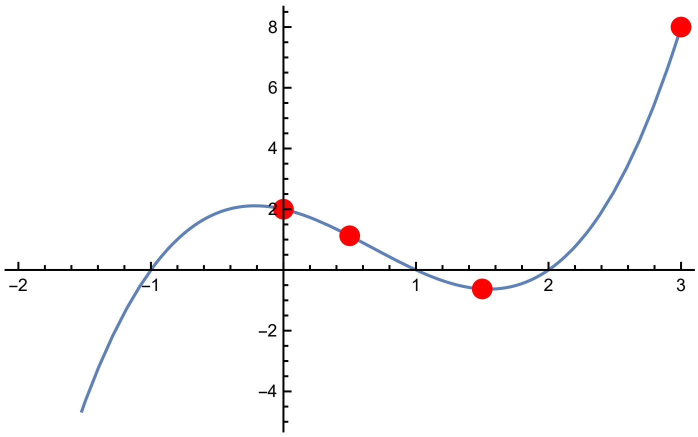
Out[∘]=
$2. - 1.\,x - 2.\,x^2 + 1.\,x^3$

In[ ]:=
```
Show[{Plot[{L}, {x, -2, 3}],
  Graphics[{Red, PointSize[0.03], Point[{{x1, y1}, {x2, y2}, {x3, y3}, {x0, y0}}]}]}]
```

Out[ ]=



Out[ ]=



Algorytm Neville’a

Alternatywny sposób obliczania wielomianu Lagrange’a:

$p_{ii} = y_i$

$p_{ij} = \frac{(x - x_i)\, p_{i+1\, j} - (x - x_j)\, p_{i\, j-1}}{x_j - x_i}$

poszukujemy $p_{0\,n}$

Out[ ]=

p00	p01	p02	p03	p04
	p11	p12	p13	p14
		p22	p23	p24
			p33	p34
				p44

In[ ]:=

```
{x0, y0} = {0, 2};
 {x1, y1} = {0.5, 1.125};
{x2, y2} = {1.5, -0.625};
{x3, y3} = {3, 8};
```

In[ ]:=
```
p00 = y0
p11 = y1
p22 = y2
p33 = y3
```

$$p01 = \frac{(x - x0)\ p11 - (x - x1)\ p00}{x1 - x0}$$

$$p12 = \frac{(x - x1)\ p22 - (x - x2)\ p11}{x2 - x1}$$

$$p02 = \frac{(x - x0)\ p12 - (x - x2)\ p01}{x2 - x0}$$

$$p23 = \frac{(x - x2)\ p33 - (x - x3)\ p22}{x3 - x2}$$

$$p13 = \frac{(x - x1)\ p23 - (x - x3)\ p12}{x3 - x1}$$

$$p03 = \frac{(x - x0)\ p13 - (x - x3)\ p02}{x3 - x0}$$

Out[ ]=
2

Out[ ]=
1.125

Out[ ]=
-0.625

Out[ ]=
8

Out[ ]=
2. (-2 (-0.5 + x) + 1.125 x)

Out[ ]=
1. (-1.125 (-1.5 + x) - 0.625 (-0.5 + x))

Out[ ]=
0.666667 (1. (-1.125 (-1.5 + x) - 0.625 (-0.5 + x)) x - 2. (-1.5 + x) (-2 (-0.5 + x) + 1.125 x))

Out[ ]=
0.666667 (0.625 (-3 + x) + 8 (-1.5 + x))

Out[ ]=
0.4 (-1. (-1.125 (-1.5 + x) - 0.625 (-0.5 + x)) (-3 + x) +
0.666667 (0.625 (-3 + x) + 8 (-1.5 + x)) (-0.5 + x))

Out[ ]=

$$\frac{1}{3} (0.4 (-1. (-1.125 (-1.5 + x) - 0.625 (-0.5 + x)) (-3 + x) + 0.666667 (0.625 (-3 + x) + 8 (-1.5 + x)) (-0.5 + x)) x - 0.666667 (-3 + x) (1. (-1.125 (-1.5 + x) - 0.625 (-0.5 + x)) x - 2. (-1.5 + x) (-2 (-0.5 + x) + 1.125 x)))$$

In[ ]:= `Simplify[p03]`

Out[ ]=
$2. - 1.\ x - 2.\ x^2 + 1.\ x^3$