2 Równanie przewodnictwa

Znajdź profil temperatury pomiędzy dwoma punktami, oddalonymi od siebie o L_0 oraz utrzymującymi stałą temperaturę. Warunki początkowe możemy zapisać jako:

$$T(0,x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x = 0 \text{ i } x = L_0 \\ f(x), & \text{dla } 0 < x < L_0 \end{cases} \tag{3}$$

gdzie $f(x)$ początkowy rozkład temperatury. Rozwiązanie ma działać dla dowolnej funkcji f - tj. w klasie/funkcjach powinna być podawana przez wskaźnik. Sprawdź działanie programu dla dwóch różnych f:

- $f(x) = -T_0$
- $f(x) = \exp(-x^2/T_0)$

Zastosuj metodę skończonych różnic do rozwiązania równania przewodnictwa:

$$\partial_t T(t,x) = \alpha \partial_x^2 T(t,x) \tag{4}$$

Przyjmując konwencję: $T(t_n, x_j) = T_j^n$, rozwiąż to równanie metodą Crank'a–Nicolson'a:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{T_{j+1}^{n+1} - 2 * T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{j+1}^n - 2 * T_j^n + T_{j-1}^n}{\Delta x^2}\right) \tag{5}$$

Przekształcając to równanie dostajemy układ równań:

$$(2 + 2\alpha r)T_j^{n+1} - rT_{j-1}^{n+1} - rT_{j+1}^{n+1} = (2 - 2\alpha * r)T_j^{n+1} + rT_{j-1}^n + rT_{j+1}^n, \tag{6}$$

gdzie $r = \Delta t/\Delta x^2$. Wygodnym sposobem rozwiązania tego układu jest algorytm Thomasa.
Narysuj wykresy $T(t_0, x)$ dla wybranych t_0. Wartości stałych można przyjąć następujące: $L_0 = 10$, $T_0 = 10$, oraz $\alpha = 1$. Następnie sprawdź jak się zmienia $T(t,x)$ w zależności od α.

2.1 Wskazówki i wyjaśnienia

1. Układ równań (6) można przedstawić za pomocą macierzy. Jedną z metod rozwiązania takiego układu może być metoda eliminacji Gauss'a ($\mathcal{O}(N^3)$). Warto jednak zauważyć, że nasza macierz zawsze będzie miała co najwyżej trzy niezerowe elementy w każdym wierszu, co znacząco ułatwia problem. Wygodniej jest zastosować algorytm Thomasa ($\mathcal{O}(N)$). Mając układ równań:
$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & d_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \tag{7}$$
modyfikujemy współczynniki w następujący sposób:
$$c'_i = \begin{cases} \frac{c_i}{b_i}, & \text{dla } i = 1 \\ \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, & \text{dla } i = 2, 3, \dots, N-1 \end{cases} \tag{8}$$
oraz
$$d'_i = \begin{cases} \frac{d_i}{b_i}, & \text{dla } i = 1 \\ \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, & i = 2, 3, \dots, N \end{cases} \tag{9}$$
Następnie "idąc od końca" wyznaczamy kolejne rozwiązania:
$$x_N = d'_N$$
$$x_i = d'_i - c'_i x_{i+1} \qquad i = N-1, N-2, \dots, 2, 1$$

2.2 Proponowane ocenianie:

1. Poprawne zadeklarowanie/definiowanie potrzebnych zmiennych i klas (15pkt)
2. Poprawna inicjalizacja warunków początkowych (15pkt)
3. Rozwiązanie układu równań wykorzystując algorytm Thomasa (15pkt)
4. Poprawne wyświetlanie wyników (10pkt)
5. Ogólna poprawność kodu (5pkt)