Zadania domowe z Podstaw Fizyki Współczesnej II
Seria VII

1. Cząstka o masie m porusza się w dwóch wymiarach w potencjale $V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + \delta V$, gdzie $\delta V = \alpha x^2 y^2 + \beta xy$, przy czym $\alpha, \beta > 0$. Posługując się rachunkiem zaburzeń pierwszego rzędu, obliczyć przybliżone wartości energii stanu podstawowego oraz pierwszego i drugiego stanu wzbudzonego, traktując δV jako małe zaburzenie potencjału oscylatora harmonicznego.

2. Cząstka o masie m porusza się w dwóch wymiarach w nieskończenie głębokiej studni potencjału o „nierównym dnie": $V(x,y) = \alpha(x+y)$ dla $0 \le x \le a$ i $0 \le y \le a$, $V(x,y) = +\infty$ poza tym obszarem ($\alpha > 0$). Posługując się rachunkiem zaburzeń pierwszego rzędu, obliczyć przybliżone wartości energii stanu podstawowego oraz pierwszego i drugiego stanu wzbudzonego, traktując $\delta V(x,y) = \alpha(x+y)$ jako małe zaburzenie potencjału nieskończenie głębokiej studni o „płaskim dnie".

3. Cząstka o masie m porusza się w trójwymiarowej przestrzeni w potencjale $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\beta}{r^2}$, gdzie $\beta > 0$. Wykonać następujące obliczenia:

(a) Pokazać, że równanie radialne w tym potencjale jest *dokładnie takie samo* jak równanie radialne dla czystego potencjału harmonicznego, jeśli dokonamy utożsamienia

$$l \to s = -\frac{1}{2} + \sqrt{(l+1/2)^2 + \gamma}.$$

(b) Dokonując prostej modyfikacji wyników otrzymanych na ćwiczeniach, wyprowadzić ścisłe wyrażenie na energie własne w tym potencjale.

(c) Przyjmując, że $\frac{2m\beta}{\hbar^2} << 1$, naszkicować schemat kilku pierwszych poziomów energetycznych w tym potencjale.

4. Cząstka o masie m porusza się w potencjale $V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\, r}$. Wykonać następujące obliczenia:

(a) Korzystając ze wzorów podawanych na wykładzie i na ćwiczeniach, wypisać funkcję falową stanu 4f ($n=4, l=3$). Następnie wyznaczyć radialny rozkład prawdopodobieństwa dla tego stanu, znaleźć położenie jego maksimów, obliczyć $< r >$ (to wymaga odpowiedniego unormowania) i $< V >$.

(b) Wykonać takie same obliczenia dla stanu 4d.

5. Rozważmy cząstkę o masie m i ładunku $-e$, poruszającą się w polu jądra o liczbie atomowej Z i liczbie masowej A. **(a)** Posługując się rachunkiem zaburzeń pierwszego rzędu, obliczyć poprawkę do energii stanów 2s i 2p wynikającą z faktu, że ładunek jądra nie jest ściśle punktowy, ale jest rozłożony z grubsza w sposób jednorodny na jego obszarze. Potraktować potencjał rzeczywistego jądra jako zaburzenie potencjału kulombowskiego punktowego ładunku Ze (patrz ćwiczenia). [**Wskazówka:** Promień jądra jest dany w przybliżeniu wzorem $R = A^{1/3} \cdot 1,2 \cdot 10^{-15}$ m, jest więc wiele rzędów wielkości mniejszy od parametru $a_0 = \hbar^2\, 4\pi\epsilon_0/me^2$. Dzięki temu obliczanie całek radialnych można radykalnie uprościć, kładąc wszędzie $r/a_0 \approx 0$.] **(b)** Oszacuj liczbową wartość $\delta E_2/E_2$ dla mezonu K^- o masie 494 MeV/c^2, poruszającego się w polu cząstki α (Z=2, A=4).

6. Hamiltonian atomu wodoru umieszczonego w niezbyt silnym, ale i niezbyt słabym polu magnetycznym o indukcji $\vec{B} = [0,0,B]$ można zapisać w postaci

$$H = H_0 + \frac{eB}{2m_e} L_z + \frac{e\hbar}{2m_e} \vec{\sigma} \cdot \vec{B},$$

gdzie H_0 jest niezaburzonym hamiltonianem atomu wodoru. Posługując się rachunkiem zaburzeń pierwszego rzędu, obliczyć poprawki do energii stanu podstawowego i pierwszego stanu wzbudzonego i przedyskutować rozszczepienie poziomów w polu magnetycznym. Należy przy tym uwzględnić fakt, że w tym zagadnieniu istotną rolę odgrywa spin elektronu.

Piotr Rączka, Adam Wójtowicz