

# Zadania domowe z Podstaw Fizyki Współczesnej II

## Seria VI

1. Spinowa funkcja falowa cząstki ma postać:

$$\Psi = a \begin{bmatrix} e^{i\pi/3} \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix},$$

gdzie  $a \in R^+$ . Wykonaj następujące obliczenia:

(a) Oblicz  $\langle S_y \rangle$ ,  $\sigma(S_y)$  i  $\langle S^2 \rangle$ .

(b) Oblicz prawdopodobieństwo, że pomiar rzutu spinu na oś OX da wartość  $\hbar/2$  (skorzystaj z jawnego wyrażenia dla odpowiedniego stanu własnego  $S_x$ , które otrzymaliśmy na ćwiczeniach).

2. Znajdź spinory będące stanami własnymi operatora rzutu spinu  $1/2$  na oś  $\vec{n}$ ,  $S_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{S}$ , gdzie  $\vec{n} = [\cos \varphi, \sin \varphi, 0]$ . Oblicz prawdopodobieństwo, że pomiar rzutu spinu na oś OX dla cząstki w stanie  $\chi_{\vec{n},+}$  da wynik  $\hbar/2$ .

3. Funkcja falowa cząstki o spinie  $1/2$  ma postać:

$$\Psi = \frac{1}{N} f(r) \left[ \cos \varphi \sin \theta \chi_+ + \cos^2 \theta \chi_- \right],$$

gdzie funkcja  $f(r)$  spełnia warunek  $\int_0^{+\infty} dr r^2 |f(r)|^2 = 1$ , a  $N \in R^+$  jest odpowiednią stałą normalizacyjną. Wykonaj następujące obliczenia:

(a) Oblicz  $\langle \mathbf{1} \cdot L^2 \rangle$ , gdzie  $\mathbf{1}$  symbolizuje macierz jednostkową w spinowych stopniach swobody.

(b) Oblicz  $\langle \mathbf{1} \cdot L_z + S_z \rangle$ .

(c) Oblicz  $P(\{S_x = -\hbar/2\})$ .

4. Cząstka o spinie  $1/2$  i momencie magnetycznym  $\vec{\mu} = \mu\sigma$  ( $\mu > 0$ ) znajduje się w stałym i jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = [B, 0, 0]$ . W chwili  $t = 0$  spin cząstki opisuje spinor  $\chi_{z,+}$ . Zakładamy, że ewolucja spinowych stopni swobody jest niezależna od ewolucji przestrzennych stopni swobody.

(a) Znajdź spinor opisujący spin cząstki dla  $t > 0$ , postępując według standardowego przepisu: (1) znajdź stany własne hamiltonianu dla tej cząstki; (2) napisz ogólne rozwiązanie równania Schrödingera dla tej cząstki w postaci kombinacji liniowej rozwiązań stacjonarnych; (3) dobierz współczynniki w taki sposób, aby ogólne rozwiązanie spełniało warunki początkowe.

(b) Oblicz  $\langle S_x \rangle$ ,  $\langle S_y \rangle$  i  $\langle S_z \rangle$  dla tego zagadnienia.

5. Cząstka o spinie  $1/2$  i momencie magnetycznym  $\vec{\mu} = \mu\sigma$  ( $\mu > 0$ ) znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji zależnej od czasu:  $\vec{B} = [0, 0, B(t)]$ ,  $B(t) = B_0/(1 + t^2/\tau^2)$ . W chwili  $t = 0$  spin cząstki opisuje spinor  $\chi_{x,+}$ . Zakładamy, że ewolucja spinowych stopni swobody jest niezależna od ewolucji przestrzennych stopni swobody.

(a) Znajdź spinor opisujący spin cząstki dla  $t > 0$ , rozwiązując bezpośrednio równanie Schrödingera zależne od czasu.

(b) Oblicz  $\langle S_x \rangle$ ,  $\langle S_y \rangle$  i  $\langle S_z \rangle$  dla  $t > 0$ .

(c) Przedyskutuj granicę  $t \rightarrow +\infty$ .