

Zadania domowe z Podstaw Fizyki Współczesnej II

Seria V

1. Funkcja falowa cząstki ma postać:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{N} r e^{-r/2a} \left[3e^{i\pi/4} Y_{43} - 2i Y_{4-2} - \sqrt{3} Y_{3-2} \right],$$

gdzie $N, a \in R^+$, a Y_{lm} są harmonikami sferycznymi. Wykonaj następujące obliczenia:

- (a) Dobierz wartość parametru N w taki sposób, aby ta funkcja była odpowiednio unormowana.
- (b) Określ, jakie są możliwe wyniki pomiaru L^2 dla cząstki opisanej tą funkcją falową i z jakim prawdopodobieństwem można je otrzymać.
- (c) Oblicz $\langle L_z \rangle$.
- (d) Oblicz $\langle L_x \rangle$ (wyraź najpierw L_x przez operatory drabinkowe L_{\pm}).

2. Funkcja falowa cząstki ma postać:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = f(r) [a Y_{2-1} + b Y_{1-1} + ic Y_{00}],$$

gdzie $a, b, c \in R^+$, a funkcja $f(r)$ spełnia warunek $\int_0^{+\infty} dr r^2 |f(r)|^2 = 1$. W wyniku pomiarów stwierdzono, że prawdopodobieństwo otrzymania wartości $L_z = 0$ jest równe $1/4$, a $\langle L^2 \rangle = \frac{5}{2} \hbar^2$. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru wartości $L^2 = 2\hbar^2$ i znajdź $\langle L_z \rangle$ oraz $\langle L_y \rangle$.

3. Funkcja falowa cząstki ma postać:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = f(r) \left[a Y_{2-1} + b e^{i\pi/8} Y_{21} + c Y_{1-1} \right],$$

gdzie $a, b, c \in R^+$, a funkcja $f(r)$ spełnia warunek $\int_0^{+\infty} dr r^2 |f(r)|^2 = 1$. W wyniku pomiarów stwierdzono, że $P(\{L^2 = 2\hbar^2\}) = 2/3$ i $P(\{L_z = -\hbar\}) = 2/3$. Znajdź $P(\{L^2 = 6\hbar^2\})$ i oblicz $\langle L_z \rangle$ oraz $\langle L^2 \rangle$.

4. Funkcja falowa cząstki ma postać:

$$\psi = f(r) \frac{1}{N} (2x + iy),$$

gdzie $N \in R^+$ jest stałą normalizacyjną, a funkcja $f(r)$ spełnia warunek $\int_0^{+\infty} dr r^4 |f(r)|^2 = 1$. Wykonaj następujące obliczenia:

- (a) Przedstaw tę funkcję jako kombinację liniową harmonik sferycznych.
- (b) Określ, jakie wartości L_z i L^2 można otrzymać w wyniku pomiaru dla tej cząstki i jakie są ich prawdopodobieństwa.
- (c) Oblicz $\langle L_z \rangle$ i $\langle L^2 \rangle$.
- (d) Wyznacz prawdopodobieństwo, że wyniku pomiaru kwadratu momentu pędu oraz rzutu momentu pędu **na oś OX** otrzymamy wartości $2\hbar^2$ i \hbar (skorzystaj z otrzymanej na ćwiczeniach funkcji własnej operatora L_x , odpowiadającej tym wartościom własnym).

5. Funkcja falowa cząstki ma postać:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = f(r) \frac{1}{N} (3 \cos \theta + 1)^2,$$

gdzie $N \in R^+$ jest stałą normalizacyjną, a funkcja $f(r)$ spełnia warunek $\int_0^{+\infty} dr r^2 |f(r)|^2 = 1$. Określ, jakie wartości L^2 i L_z można otrzymać w wyniku pomiaru dla tej cząstki i z jakimi prawdopodobieństwami. Oblicz $\langle L_x \rangle$. **[Wskazówka:** Przedstaw tę funkcję jako superpozycję Y_{00}, Y_{1m}, Y_{2m} .]