Zadania domowe z Podstaw Fizyki Współczesnej II
Seria IV

1. Cząstki o masie m i energii E rozpraszają się w jednym wymiarze na potencjale $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$, gdzie $V_1(x) = \alpha\delta(x)$ ($\alpha > 0$), a $V_2(x) = 0$ dla $x < 0$ i $-\Lambda_0 < 0$ dla $x > 0$. [Inaczej mówiąc, jest to wąska, ale wysoka bariera potencjału w punkcie $x = 0$, po której następuje skokowy spadek potencjału.] Cząstki padają na barierę z obszaru $x < 0$.

(a) Znaleźć rozwiązania stacjonarne $\psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}u(x)$ dla tego zagadnienia:, uwzględniając warunek zszycia narzucany przez obecność potencjału $V_1(x)$:

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=0^+} - \frac{du}{dx}\Big|_{x=0^-} = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}u\,\Big|_{x=0}\ .$$

(b) Obliczyć współczynniki przejścia T i odbicia R dla tego potencjału i upewnić się, że $T + R = 1$.

(c) Pokazać, że w granicy $\alpha \to 0$ dostajemy wynik znany z podręczników, a w granicy $\Lambda_0 \to 0$ – wynik otrzymany na ćwiczeniach.

2. Obliczyć komutatory: $[x^2, p_x]$, $[p_x^2 + p_y^2, L_z]$.

3. Zbadać, czy podane operatory są hermitowskie: $xp_x + p_x x$, $p_x L_x$, $x^2 L_y$.

4. Cząstka o masie m porusza się w jednym wymiarze w potencjale oscylatora harmonicznego: $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. W chwili $t = 0$ jej stan opisuje funkcja falowa: $\psi_0(x) = \alpha u_1(x) + \frac{4i}{5}u_2(x)$, gdzie $\alpha \in R^+$, a u_1, u_2 to odpowiednio funkcje falowe pierwszego i drugiego stanu wzbudzonego oscylatora. Wykonaj następujące obliczenia:

(a) Wyznacz stałą α w taki sposób, aby funkcja falowa była unormowana.

(b) Znajdź $\psi(x,t)$ dla $t > 0$.

(c) Oblicz wartość średnią położenia $< x >$ jako funkcję t.

5. Korzystając z przedstawienia operatora pędu $\hat{p}$ przez operatory kreacji i anihilacji dla oscylatora harmonicznego o potencjale $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, wypisz kilka wyrazów macierzy $< u_k|\hat{p}u_l >$ w bazie funkcji własnych oscylatora.

6. Cząstka o masie m porusza się w jednym wymiarze w potencjale oscylatora harmonicznego: $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. W chwili $t = 0$ jej stan opisuje funkcja falowa: $\psi_0(x) = u_0(x - a)$, gdzie $a > 0$. [Inaczej mówiąc, jest to stan podstawowy tego samego oscylatora harmonicznego, ale *przesuniętego* o a w prawo.] Oblicz prawdopodobieństwo, że w wyniku pomiaru energii cząstki otrzymamy następujące wyniki: $E = \hbar\omega$, $E = 3\hbar\omega/2$.

7. Wyznacz możliwe wyniki pomiaru energii i ich prawdopodobieństwa dla sytuacji opisanej w zadaniu 4. Oblicz $< E >$. Jaka będzie zależność od czasu otrzymanych wyników?

8. Cząstka o masie m porusza się w dwóch wymiarach w nieskończenie głębokiej studni potencjału: $V(x,y) = 0$ dla $0 \le x \le a$ i $0 \le y \le a$, $V(x,y) = +\infty$ poza tym obszarem. W chwili $t = 0$ stan cząstki opisuje funkcja falowa:

$$\psi_0(x,y) = \frac{2}{a}\left[\frac{1}{3}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + \frac{\sqrt{5}}{3}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{a}\right].$$

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru następujących wartości energii: $E = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}$, $E = \frac{5\pi^2\hbar^2}{ma^2}$, $E = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. Jaka będzie zależność od czasu otrzymanych wyników?

Piotr Rączka, Adam Wójtowicz