Zadania domowe z Podstaw Fizyki Współczesnej II
Seria III

1. Elektron porusza się nieskończenie głębokiej studni potencjału w kształcie sześcianu o boku $a = 0,1$ nm. Oblicz energie stanu podstawowego oraz pierwszego i drugiego stanu wzbudzonego elektronu, wyrażając je w eV.

2. Cząstka o masie m porusza się w dwóch wymiarach w nieskończenie głębokiej studni potencjału w kształcie prostokąta $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, a jej funkcja falowa odpowiada stanowi podstawowemu w tej studni. Oblicz prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze $0 \le x \le a/4$, $0 \le y \le b/2$.

3. Cząstka o masie m porusza się w dwóch wymiarach w nieskończenie głębokiej studni potencjału w kształcie prostokąta $0 \le x \le 2a$, $0 \le y \le a$. Jej funkcja falowa w chwili $t = 0$ jest dana wzorem:

$$\psi(x, y, 0) = \alpha \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} + \beta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a},$$

gdzie α i β to odpowiednio dobrane stałe. Znajdź $\psi(x, y, t)$ dla $t > 0$ i udowodnij, że wynikający z tej funkcji falowej rozkład prawdopodobieństwa dla położenia cząstki w studni nie zależy od czasu.

4. Cząstka o masie m porusza się w jednym wymiarze w studni potencjału o skończonej głębokości:

$$V(x) = \begin{cases} -\Lambda_0 & \text{dla } -a \le x \le a \\ 0 & \text{dla } |x| > a \end{cases}$$

gdzie parametry m, a i $\Lambda_0 > 0$ są powiązane zależnością $m\Lambda_0 a^2 = \pi^2\hbar^2/16$. Korzystając z wyników uzyskanych na ćwiczeniach, wykonaj następujące obliczenia:

(a) Pokaż, że w takiej studni istnieje dokładnie jeden stan związany o energii $E = -\Lambda_0/2$.

(b) Znajdź unormowaną funkcję falową tego stanu i korzystając z kalkulatora lub komputera naszkicuj jej wykres, przyjmując $a = 10$ nm. Dla studni o tej szerokości oblicz także głębokość Λ_0 wynikającą z podanego powyżej warunku, wyrażając ją w eV.

(c) Oblicz prawdopodobieństwo, że cząstka zostanie znaleziona poza obszarem dozwolonym klasycznie.

5. Cząstka o masie m porusza się w jednym wymiarze w studni potencjału następującej postaci:

$$V(x) = \begin{cases} \alpha\, \delta(x - \frac{a}{2}) & \text{dla } 0 \le x \le a \\ +\infty & \text{dla } x < 0 \text{ i } x > a \end{cases}$$

gdzie $\alpha > 0$, a $\delta(x - a/2)$ oznacza funkcję delta Diraca. (Inaczej mówiąc, jest to zwykła nieskończenie głęboka studnia potencjału, przedzielona w środku bardzo wąską i bardzo wysoką przegrodą.) Zbadaj zagadnienie własne $Hu_n = E_n u_n$ dla tego układu:

(a) Znajdź ogólną postać funkcji spełniającej równanie własne dla $x \ne a/2$.

(b) Znajdź dokładną postać funkcji własnej oraz warunek na energie własne, uwzględniając warunki brzegowe w $x = 0, a$ oraz warunek zszycia w $x = a/2$, wynikający z obecności funkcji delta Diraca:

$$\frac{du_n}{dx}\Big|_{x=a/2+\epsilon} - \frac{du_n}{dx}\Big|_{x=a/2-\epsilon} = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} u_n \Big|_{x=a/2}$$

(c) Przyjmując, że $a2m\alpha/\hbar^2$ jest wielkością małą, oblicz w przybliżeniu energię stanu podstawowego i pierwszego stanu wzbudzonego w tej studni, dokonując odpowiedniego rozwinięcia w warunku na energie własne.

Piotr Rączka, Adam Wójtowicz