Zadania domowe z Podstaw Fizyki Współczesnej II
Seria II

1. Cząstka poruszająca się w jednym wymiarze jest opisana w chwili $t = 0$ funkcją falową postaci:

$$\psi(x) = \begin{cases} Axe^{-(\alpha x + i\beta)^2} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

gdzie A, α, β to rzeczywiste i dodatnie stałe. Wykonaj następujące obliczenia:

(a) Wyznacz stałą A w taki sposób, aby funkcja $\psi(x)$ była odpowiednio unormowana. Naszkicuj rozkład prawdopodobieństwa dla położenia cząstki.

(b) Oblicz wartość średnią $< x >$ i średnie odchylenie kwadratowe σ_x dla wyników pomiaru położenia cząstki opisywanej tą funkcją.

(c) Oblicz wartość średnią $< p_x >$ i średnie odchylenie kwadratowe σ_p dla wyników pomiaru pędu cząstki opisywanej tą funkcją.

(d) Oblicz iloczyn $\sigma_x \sigma_p$ i porównaj z wynikiem otrzymanym na ćwiczeniach dla gaussowskiej funkcji falowej.

Wskazówka: Sprowadź powyższe rachunki do problemu obliczania całek typu

$$\int_0^{+\infty} dx\, x^n\, e^{-x}, \quad \int_0^{+\infty} dx\, x^{2n}\, e^{-x^2},$$

które znajdziesz w tablicach matematycznych.

2. Cząstka poruszająca się jednym wymiarze znajduje się w nieskończenie głębokiej studni potencjału, obejmującej obszar $x \in < 0, a >$. W chwili $t = 0$ jej stan opisuje funkcja:

$$\psi_0(x) = \alpha u_1(x) + \frac{3i}{5} u_3(x),$$

gdzie α jest rzeczywistą i dodatnią stałą, a funkcje $u_n(x)$ są unormowanymi funkcjami własnymi hamiltonianu cząstki w studni. Wykonaj następujące obliczenia:

(a) Wyznacz stałą α tak, by funkcja ψ_0 była odpowiednio unormowana.

(b) Oblicz prawdopodobieństwo, że pomiar położenia cząstki w chwili $t = 0$ da wynik z przedziału $< 0, a/3 >$.

(c) Znajdź postać funkcji falowej $\psi(x, t)$ dla $t > 0$.

(d) Oblicz $< p_x >$ dla $t > 0$.

3. Cząstka poruszająca się jednym wymiarze znajduje się w nieskończenie głębokiej studni potencjału, obejmującej obszar $x \in < 0, a >$. W chwili $t = 0$ jej stan opisuje funkcja:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{6}{a}} \sin \frac{3\pi x}{a} & \text{dla } x \in < a/3, 2a/3 > \\ 0 & \text{dla } x \notin < a/3, 2a/3 >. \end{cases}$$

Znajdź dla $t > 0$ dwa pierwsze nieznikające wyrazy rozwinięcia $\psi(x, t)$ na funkcje własne $u_n(x)$ hamiltonianu cząstki w studni.

Piotr Rączka, Adam Wójtowicz