Kolokwium z Podstaw Fizyki Współczesnej II, Blok 2, 22.01.2008

Z podanych niżej trzech zadań należy zrobić dwa. Można zrobić wszystkie trzy, wtedy do oceny końcowej zalicza się punkty z dwóch zrobionych najlepiej.

Zadanie 1. Funkcja falowa cząstki o spinie 1/2 ma postać:

$$\Psi = \frac{1}{N} f(r) \left[4i\, Y_{2-1}\, \chi_+ + 3\, Y_{32}\, \chi_-\right],$$

gdzie funkcja $f(r)$ spełnia warunek $\int_0^{+\infty} dr\, r^2\, |f(r)|^2 = 1$, $N \in R^+$ jest odpowiednią stałą normalizacyjną, a $\chi_\pm$ to stany własne operatora rzutu spinu $\vec{S}$ na oś OZ. Wykonaj następujące obliczenia:

(a) Oblicz $< S_x >$.

(b) Zdefiniujmy operator $J_z = \mathbf{1} \cdot L_z + S_z$, gdzie $\mathbf{1}$ symbolizuje macierz jednostkową w spinowych stopniach swobody. Oblicz $< J_z >$ i dyspersję J_z.

(c) Oblicz prawdopodobieństwo, że pomiar rzutu spinu na oś OY da wynik $+\hbar/2$. Funkcja własna operatora S_y odpowiadająca wartości własnej $+\hbar/2$ ma postać:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Wskazówka: Iloczyn skalarny pełnych spinorowych funkcji falowych $\Psi_1(\vec{r})$, $\Psi_2(\vec{r})$, dany jest wzorem

$$< \Psi_1 | \Psi_2 > = \int d^3\vec{r}\, \Psi_1^\dagger \Psi_2,$$

gdzie $\Psi^\dagger$ oznacza sprzężenie hermitowskie w sensie macierzowym.

Zadanie 2. Cząstka o masie m porusza się w dwóch wymiarach w potencjale

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) + \delta V \quad \text{gdzie} \quad \delta V = \alpha x^3 y \quad (\alpha > 0).$$

Posługując się rachunkiem zaburzeń pierwszego rzędu, oblicz przybliżone wartości energii stanu podstawowego oraz pierwszego i drugiego stanu wzbudzonego w tym potencjale, traktując δV jako małe zaburzenie potencjału oscylatora harmonicznego. **Wskazówka:** Wygodnie jest skorzystać z relacji $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_x + a_x^\dagger)$, gdzie a_x i $a_x^\dagger$ są odpowiednio operatorami anihilacji i kreacji, tzn. $a_x\, u_n(x) = \sqrt{n}\, u_{n-1}(x)$, $a_x^\dagger\, u_n(x) = \sqrt{n+1}\, u_{n+1}(x)$, a $u_n(x)$ są funkcjami własnymi jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.

Zadanie 3. Cząstka o masie m porusza się w potencjale $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{15\hbar^2}{8\, m\, r^2}$, gdzie $\alpha > 0$. Jak wiadomo, funkcje własne hamiltonianiu dla tej cząstki można zapisać w postaci $f(r, \theta, \varphi) = \frac{u(r)}{r}\, Y_{lm}(\theta, \varphi)$, gdzie $u(r)$ spełnia równanie:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2\, l(l+1)}{2mr^2} + V(r)\right] u(r) = E\, u(r).$$

Wykonaj następujące obliczenia:

(a) Uzasadnij, że funkcja $u(r)$ dla *stanu podstawowego* tej cząstki powinna mieć postać $u(r) = C\, r^\sigma e^{-\kappa r}$, gdzie σ, κ są odpowiednio dobranymi stałymi. Następnie znajdź dokładną postać tej funkcji.

(b) Znajdź wyrażenie na radialny rozkład prawdopodobieństwa $P_{rad}(r) = r^2 \int d\Omega |f(r, \theta, \varphi)|^2$ w stanie podstawowym, wyznacz położenia jego maksimów i naszkicuj ten rozkład.

(c) Oblicz $< r >$ dla stanu podstawowego. **Wskazówka:** Przydatna całka: $\int_0^{+\infty} dx\, x^n\, e^{-bx} = n!/b^{n+1}$ dla n naturalnych i $b > 0$.