Kolokwium z Podstaw Fizyki Współczesnej II, Blok 1, 4.12.2007

Z podanych niżej trzech zadań należy zrobić dwa. Można zrobić wszystkie trzy, wtedy do oceny końcowej zalicza się punkty z dwóch zrobionych najlepiej.

Zadanie 1. Stan kwantowy cząstki poruszającej się w jednym wymiarze opisuje funkcja falowa

$$\psi(x) = \begin{cases} C\,xe^{-(\alpha+i\beta)x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

gdzie $C, \alpha, \beta \in R^+$. Wykonaj następujące obliczenia:

(a) Wyznacz stałą C, aby funkcja falowa była odpowiednio unormowana.

(b) Oblicz $< p_x >$.

(c) Przyjmując $\beta = 0$, wyznacz profil $\tilde{\psi}(k)$ tej paczki falowej w przestrzeni wektorów falowych, związany z funkcją $\psi(x)$ relacją $\psi(x) = \int \frac{dk}{2\pi}\tilde{\psi}(k)\,e^{ikx}$.

(d) Dla otrzymanego profilu znajdź rozkład prawdopodobieństwa w przestrzeni wektorów falowych, naszkicuj jego wykres i oblicz prawdopodobieństwo, że w wyniku pomiaru pędu otrzymamy wartość dodatnią.

Zadanie 2. Cząstka o masie m porusza się w bardzo głębokiej, ale jednocześnie bardzo wąskiej studni potencjału, którą można w przybliżeniu opisać za pomocą funkcji delta Diraca: $V(x) = -\alpha\delta(x)$, gdzie $\alpha > 0$. Wykonaj następujące obliczenia:

(a) Uwzględniając odpowiedni warunek zszycia dla pochodnej funkcji falowej

$$\frac{du}{dx}\,|_{x=0^+} - \frac{du}{dx}\,|_{x=0^-} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2}u\,|_{x=0},$$

pokaż, że w tej studni istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia własnego $Hu = Eu$ z *ujemną* energią. Znajdź tę energię.

(b) Unormuj otrzymaną funkcję falową i naszkicuj rozkład prawdopodobieństwa położenia cząstki na osi w tym stanie własnym.

Zadanie 3. Cząstka o masie m porusza się w dwóch wymiarach w potencjale oscylatora harmonicznego: $V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$. W chwili $t = 0$ stan cząstki opisuje funkcja falowa:

$$\psi_0(x,y) = \left[\frac{3i}{5}u_0(x) + \frac{4}{5}u_1(x)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{3}}u_1(y) + \beta u_2(y)\right],$$

gdzie $\beta \in R^+$, a u_n są funkcjami własnymi jednowymiarowego oscylatora harmonicznego, odpowiadającymi energiom $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$. Wykonaj następujące obliczenia:

(a) Wyznacz współczynnik β, aby funkcja falowa ψ_0 była odpowiednio unormowana.

(b) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru energii $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

(c) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru energii $E = 3\hbar\omega$.

(d) Znajdź postać funkcji falowej dla $t > 0$ i oblicz $< p_x >$ dla $t > 0$. [**Wskazówka:** W tym celu wygodnie jest skorzystać z relacji $p_x = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}i(a_x^\dagger - a_x)$, gdzie a_x i $a_x^\dagger$ są odpowiednio operatorami anihilacji i kreacji, tzn. $a_x\,u_n(x) = \sqrt{n}\,u_{n-1}(x)$, $a_x^\dagger = \sqrt{n+1}\,u_{n+1}(x)$.