Zadania domowe z Teorii Grup w Fizyce, seria 2

Zad. 1. Znaleźć orbity działania (naturalnego) grupy G na $\mathbb{C}^2$ postaci

$$G \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad (a, \mathbf{x}) \mapsto a\mathbf{x},$$

gdzie $a \in G,\ x \in \mathbb{C}^2$, dla $G = SU(2)$ oraz $G = SL(2, \mathbb{C})$.

Zad. 2. Pokazać, że dla nieprzywiedlnych charakterów χ_i skończonej grupy G zachodzi relacja (ortogonalność kolumnowa)

$$\sum_{i=1}^{p} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = |C_G(g_r)|\delta_{rs} \qquad r, s = 1, 2, 3, \ldots, p\ ,$$

gdzie elementy $g_1, g_2, \ldots, g_p$ są reprezentantami klas sprzężoności w G, a $C_G(g_r) = \{g \in G :\ gg_r = g_r g\}$ jest centralizatorem elementu g_r. *Wskazówka:* Rozważyć p funkcji centralnych ψ_i takich, że $\psi_i(g_j) = \delta_{ij}$.

Zad. 3. Wykorzystując tablicę charakterów grupy permutacji S_4 rozłożyć iloczyny tensorowe reprezentacji nieprzywiedlnych na sumy proste reprezentacji.

Zad. 4. Skonstruować tablicę charakterów wszystkich zespolonych, nieprzywiedlnych reprezentacji grupy D_4 oraz D_5. Rozłożyć iloczyny tensorowe $\tau_i \otimes \tau_j$ reprezentacji nieprzywiedlnych τ_i tej grupy na sumy proste reprezentacji nieprzywiedlnych.

Zad. 5. Niech ρ będzie reprezentacją regularną grupy D_3. Wyznaczyć i wypisać wszystkie macierze reprezentacji ρ w bazie standardowej e_a takiej, że $e_a(b) = \delta_{ab},\ a, b \in D_3$. Skonstruować endomorfizmy P_i stanowiące układ operatorów rzutowych na podprzestrzenie $V_i \subset V$, w których działają reprezentacje nieprzywiedlne τ_i grupy D_3. Znaleźć bazy przestrzeni V_i.

Zad. 6. Znaleźć lokalne, jednoparametrowe grupy przekształceń $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ odpowiadające wektorom zdefiniowanym na $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = \partial_x\ , \qquad v_2 = \partial_y\ , \qquad v_3 = x\partial_y\ .$$

Czy wektory te tworzą skończenie wymiarową algebrę Liego? Jeśli tak to wyznaczyć jej wymiar i stałe struktury.

Zad. 7. Pokazać, że następujący zbiór komutatorów

$$\begin{array}{llll}
[e_1, e_2] = e_5, & [e_1, e_3] = e_6, & [e_1, e_4] = e_7, & [e_1, e_5] = -\,e_8, \\
[e_2, e_3] = e_8, & [e_2, e_4] = e_6, & [e_2, e_6] = -\,e_7, & [e_3, e_4] = -\,e_5, \\
[e_3, e_5] = -\,e_7, & [e_4, e_6] = -e_8, & \text{pozostałe} & [e_i, e_j] = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, 8)
\end{array}$$

zadaje strukturę 8-wymiarowej algebry Liego $\mathfrak{g}$. Znaleźć podalgebrę $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Zad. 8. Udowodnić, że algebra $o(3)$ jest prosta.

Zad. 9. Znaleźć 2-wymiarową reprezentację zespolonej algebry $sl(2, \mathbb{C})$. Wyznaczyć taką jej bazę $\{H, X_1, X_2\}$, że $ad_H X_i := [H, X_i] = \alpha_i X_i$ (bez sumowania po i), $i = 1, 2$, $\alpha_i = const.$

Zad. 10. Znaleźć algebrę grupy $SU(3)$ i wyznaczyć jej stałe struktury.

Zad. 11. Znaleźć obraz algebry $sl(2, \mathbb{R})$ przy odwzorowaniu $\exp : sl(2, \mathbb{R}) \to SL(2, \mathbb{R})$. Czy funkcja exp w tym przypadku jest surjekcją, injekcją?

Zad. 12. Wyznaczyć algebrę grupy izometrii dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej i Minkowskiego. *Wskazówka:* Grupa izometrii jest iloczynem półprostym grupy obrotów i grupy przesunięć i można ją reprezentować w postaci macierzy

$$\begin{pmatrix} R & \vec{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

gdzie R jest macierzą obrotu, a $\vec{v}$ przesunięciem.

Zad. 13. Znaleźć formę Killinga algebry $gl(n, \mathbb{R})$. Wybrać bazę $(E_{ij})_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb}$.

Zad. 14. Pokazać, że forma Maurera-Cartana ω grupy $SU(2)$ sparametryzowanej następująco:

i) $SU(2) \ni g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$

ii) $SU(2) \ni g = \cos(\psi/2) + i\sin(\psi/2) n_i \sigma_i, \qquad n_i n_i = 1$

rozklada sie w bazie (e_i) algebry $su(2)$. W przypadku ii) sparametryzować n_i oraz wyznaczyć formę Maurera-Cartana $\omega = \omega^i e_i$, pola lewoniezmiennicze i lewoniezmienniczą miarę na grupie $SU(2)$.

Zad. 15. Jakiej transformacji Lorentza odpowiada macierz $\begin{pmatrix} 1 & i\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$ przy homomorfiźmie $SL(2, \mathbb{C}) \to SO_0(1, 3)$?

Zad. 16. Niech

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y & x + t \\ x - t & -y \end{pmatrix} ,$$

gdzie $\vec{x} = (t, x, y) \in \mathbb{R}^3$. Udowodnij, że

$$\varphi(\vec{x}) \mapsto a\varphi(\vec{x})a^{-1} = \varphi(h(a)\vec{x}) ,$$

gdzie $a \in SL(2, \mathbb{R})$, zadaje homomorfizm $SL(2, \mathbb{R}) \xrightarrow{h} O(1, 2)$. Znaleźć jądro tego homomorfizmu.

Adam Szereszewski