Zadania domowe z Teorii Grup w Fizyce 2024, seria 1

Zad.1 W zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych definiujemy działanie $\heartsuit$ następująco: $x\heartsuit y = x + (-1)^x y$. Sprawdzić, czy $(\mathbb{Z}, \heartsuit, 0)$ jest grupą. Jeśli tak to czy jest to grupa abelowa?

Zad.2 W zbiorze $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 1\}$ określamy działanie $*$ następująco: $a * b = ab - a - b + 2$. Czy zbiór A z tak określonym działaniem $*$ jest grupą? Jeśli tak to znaleźć element neutralny oraz element odwrotny do dowolnego elementu $g \in A$, a także izomorfizm $\phi : \mathbb{R}_+ \to A$, gdzie $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ jest grupą liczb dodatnich ze zwyklym mnożeniem.

Zad.3 Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G. Pokazać, iż relacja

$$a \sim a' \quad \Leftrightarrow \quad \text{Istnieją elementy } b_1 \in H_1 \text{ i } b_2 \in H_2 \text{ takie, że } a' = b_1 a b_2$$

jest relacją równoważności w G; klasy równoważności ze względu na tę relację nazywają się podwójnymi warstwami.

Zad.4 Ile elementów posiada grupa G generowana przez 2 elementy a i b, które spełniają następujące relacje: $a^{-1}ba = b^2$, $b^{-1}ab = a^2$?

Zad.4 Niech $a \in G$ będzie elementem rzędu 5 i $b \in G$ elementem różnym od neutralnego. Jaki rząd ma element b jeśli $a^{-1}ba = b^2$?

Zad.5 Dana jest grupa $G = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ z mnożeniem modulo 15. Czy jest to grupa abelowa? Czy można ją przedstawić jako iloczyn dwóch grup? Jaka to grupa?

Zad.6 Pokazać, że jeśli k jest liczbą nieparzystą, to kwadrat k-cyklu jest cyklem. Znaleźć kwadrat cyklów: (12345678) i (123456789).

Zad.7 Znaleźć centrum grupy Heisenberga składającej się ze wszystkich macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{C} .$$

Zad.8 Pokazać, że grupa wszystkich symetrii trójkąta równobocznego jest izomorficzna grupie S_3.

Zad.9 Pokazać, że Aut $\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = S_3$.

Zad.10 Jaką grupę tworzy zbiór następujących odwzorowań: $f_i : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$, gdzie
a) $f_1 : z \mapsto z, \qquad f_2 : z \mapsto \frac{1}{z}, \qquad f_3 : z \mapsto -z, \qquad f_4 : z \mapsto -\frac{1}{z}$?
b) $f_1 : z \mapsto z$, $f_2 : z \mapsto \frac{1}{z}$, $f_3 : z \mapsto 1 - z$, $f_4 : z \mapsto \frac{z}{z-1}$, $f_5 : z \mapsto \frac{1}{1-z}$, $f_6 : z \mapsto \frac{z-1}{z}$?
Działaniem jest składanie odwzorowań.

Zad.11 Grupa Pauliego $\mathcal{P}$ jest to grupa, o jedności oznaczonej przez 1, generowana przez 4 elementy $\varepsilon, e_1, e_2, e_3$, spełniające następujące relacje

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 = 1 , \quad e_i^2 = 1 , \quad \varepsilon e_i = e_i \varepsilon \quad i = 1, 2, 3 \\ \text{oraz} \quad e_i e_j = \varepsilon e_j e_i \quad \text{dla} \quad i \neq j = 1, 2, 3 . \end{gathered}$$

Jaki jest rząd grupy Pauliego $\mathcal{P}$? Zapisać wszystkie elementy $\mathcal{P}$ przy użyciu generatorów. Znaleźć klasy elementów sprzężonych w $\mathcal{P}$.

Zad.1 Niech $\rho_{\mu\nu}$ będą elementami macierzowymi nieprzywiedlnej reprezentacji ρ skończonej grupy G. Obliczyć $\sum_{a \in G} \rho_{\mu\nu}(a)$.

Zad.2 Niech χ będzie charakterem reprezentacji skończonej grupy G, a g elementem rzędu 2. Pokazać, że $\chi(g)$ jest liczbą całkowitą oraz

$$\chi(g) \equiv \chi(e) \; mod \; 2 .$$

Zad.3 Niech χ będzie nieprzywiedlnym charakterem skończonej grupy G, a $z \in Z(G)$ będzie elementem rzędu m. Udowodnić, że istnieje m-ty pierwiastek z jedynki $\lambda \in \mathbb{C}$ taki, że zachodzi relacja

$$\chi(zg) = \lambda \chi(g) \ , \qquad \forall g \in G \ .$$

Zad.4 Niech χ będzie charakterem reprezentacji grupy G. Pokazać, że $(\chi_{reg}|\chi) = \chi(e)$.

Zad.5 Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ grupy G. Co możemy powiedzieć o rozkładzie ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych jeśli $(\chi|\chi) = 1, 2, 3, 4$?

Zad.6 Wyznaczyć wymiary wszystkich nieprzywiedlnych, zespolonych reprezentacji grupy S_5. *Wskazówka:* Istnieją dwie nierównoważne 5 wymiarowe reprezentacje nieprzywiedlne.

Adam Szereszewski