Andrzej Trautman

Instytut Fizyki Teoretycznej UW

Spinory i twistory

Rozszerzony tekst referatu wygłoszonego – zamiast wykładu – na seminarium
Teorii Względności i Grawitacji
w dniach 20 i 27 lutego 2009 roku

Plan

Spinory u Starożytnych Greków
Prehistoria: Euler, Hamilton, Cayley, Clifford, Lipschitz
Historia: Cartan, Pauli, Dirac, van der Waerden, Fock, Weyl, Chevalley
Algebry Clifforda, zegar spinorowy
Różniczkowanie kowariantne i struktury spin
Penrose: zastosowania w OTW, twistory, tw. Kerra, rozwiązania równań cząstek o masie 0

Starożytni Grecy mogli byli odkryć spinory

Równanie Pitagorasa

$$x^2 - y^2 + z^2 = 0$$

jest równoważne

$$\begin{pmatrix} y-x & z \\ z & y+x \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}, \tag{G1}$$

co daje znalezione około 2400 lat temu przez EUKLIDESa rozwiązanie

$$x = q^2 - p^2, \quad y = p^2 + q^2, \quad z = 2pq.$$

Stąd: w $\mathbb{R}^3$ z formą kwadratową o sygnaturze $(2, 1)$ jest

$$\text{wektor zerowy} = (\text{spinor})^2.$$

Czego jeszcze można nauczyć się od Euklidesa?

1. Grupa Spin(1,2)

Mnożąc (G1) z lewej strony przez macierz $a \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ i z prawej przez macierz transponowaną a^*, obliczając det otrzymuje się

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{Spin}_0(1, 2) \to \mathrm{SO}_0(1, 2) \to 1.$$

2. Idea algebr CLIFFORDa

Mnożąc (G1) z lewej strony przez macierz

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i podnosząc do kwadratu,

$$\begin{pmatrix} z & x+y \\ x-y & -z \end{pmatrix}^2 = (x^2 - y^2 + z^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{G2}$$

otrzymuje się linearyzację formy kwadratowej oraz $\mathcal{C}\ell^+(1,2) = \mathbb{R}(2)$.

3. Nietrywialna topologia

Obrót w płaszczyźnie (p,q) o kąt ϕ indukuje obrót w płaszczyźnie (x,z) o kąt 2ϕ: „spinory zmieniają znak pod wpływem obrotu o 2π".

4. Macierze Pauliego

Wprowadzając liczby zespolone i zastępując w (G2) liczbę y przez $-\mathrm{i}y$ otrzymuje się

$$\begin{pmatrix} z & x-\mathrm{i}y \\ x+\mathrm{i}y & -z \end{pmatrix} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z, \quad (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})^2 = (x^2+y^2+z^2)I.$$

5. Spin(3)=SU(2)

Macierz $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}$ jest hermitowska, więc $a\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}a^\dagger$ też; jeśli $a \in \mathrm{SU}(2)$, to $a^\dagger a = I$, więc $(a\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}a^\dagger)^2 = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})^2$.

Prehistoria spinorów zaczyna się od EULERa

Leonhard Euler znalazł w 1770 roku wymierne przedstawienie obrotu $(x,y,z) \mapsto (x',y',z')$ przy pomocy wzoru równoważnego

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r} \mapsto \boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}' = (p^2+q^2+r^2+s^2)^{-1} U\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}U^\dagger, \tag{E}$$

gdzie

$$U = \begin{pmatrix} p+\mathrm{i}s & r+\mathrm{i}q \\ -r+\mathrm{i}q & p-\mathrm{i}s \end{pmatrix}, \quad \det U = p^2+q^2+r^2+s^2 \neq 0,$$

więc $a = U/\sqrt{p^2+q^2+r^2+s^2} \in \mathrm{SU}(2)$ i równanie (E) określa SU(2) jako podwójne nakrycie SO(3). Praca Eulera, napisana po łacinie, dostępna jest w jego *Opera Omnia*:

Kwaterniony i grupy Spin: HAMILTON 1844 i CAYLEY 1855

Niech $X = t + \mathrm{i}x + \mathrm{j}y + \mathrm{k}z \in \mathbb{H}$, to $X\bar{X} = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Niech a i b będą jednostkowymi kwaternionami, $a\bar{a} = 1$ i $b\bar{b} = 1$.

Hamilton zauważył, że jeśli X jest czysto urojone, tzn $t = 0$, to $X' = aX\bar{a}$ też i $X'\bar{X}' = X\bar{X}$, co pokazuje, że

$$\mathrm{Spin}(3) = \mathrm{Sp}(1).$$

Wiadomo, że $\mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2)$.
Cayley pokazał więcej: dla dowolnego $X \in \mathbb{H}$ oraz $X' = aX\bar{b}$ jest $X'\bar{X}' = X\bar{X}$, co daje

$$\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1).$$

Algebry i grupy Clifforda: CLIFFORD 1878 i LIPSCHITZ 1886

Clifford wprowadził swoje „geometryczne algebry” jako uogólnienie: z jednej strony algebr $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, a z drugiej - algebr Grassmanna.

Mnożenie zewnętrzne wektorów x, y, spełniające $xy + yx = 0$ w $\bigwedge V$ zastępuje się przez mnożenie takie, że $xy + yx = 2h(x, y)$, gdzie h jest iloczynem skalarnym w m-wymiarowej, rzeczywistej lub zespolonej, przestrzeni wektorowej V. Wzorując się na algebrach $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, Clifford zakładał, że przestrzeń V jest rzeczywista, a forma kwadratowa $h(x, x)$ – ujemnie określona. ($V = \operatorname{Im}\mathbb{C}$ i $\operatorname{Im}\mathbb{H}$).

Formalna definicja: algebra Clifforda $\mathcal{C}\ell(V, h)$ to iloraz algebry tensorowej

$$\mathcal{T}V = \oplus_{k=0}^{\infty} \otimes^k V$$

przez ideał generowany w tej algebrze przez wszystkie elementy postaci $x \otimes x - h(x, x)$, $x \in V$.

Mając reper ortonormalny $(e_1, \ldots, e_m)$ w V, wprowadza się reper w algebrze Clifforda składający się z następujących elementów
1
$e_1, \ldots, e_m$
$e_\mu e_\nu \quad \text{gdzie} \quad 1 \leqslant \mu < \nu \leqslant m$
$\ldots$
$e_1 e_2 \ldots e_m$
więc

$$\dim \mathcal{C}\ell(V, h) = \dim \bigwedge V = 2^m.$$

Jako przestrzeń wektorowa, $\mathcal{C}\ell(V, h)$ jest izomorficzna, w naturalny sposób, z $\bigwedge V$.

Element objętości $\eta = e_1 e_2 \ldots e_m$ komutuje (antykomutuje) z wektorami jeśli m jest nieparzyste (parzyste). Zależnie od sygnatury jest $\eta^2 = 1$ albo -1.

Algebra Clifforda jest łączna, ma jedność i gradację,

$$\mathcal{C}\ell(V, h) = \mathcal{C}\ell^+(V, h) \oplus \mathcal{C}\ell^-(V, h).$$

Jest *uniwersalna* w tym sensie, że jeśli $\mathcal{A}$ jest algebrą z $1_{\mathcal{A}}$, a $f : V \to \mathcal{A}$ jest odwzorowaniem liniowym posiadającym własność Clifforda, tzn takim, że $f(x)^2 = h(x,x)1_{\mathcal{A}}$, to f przedłuża się do homomorfizmu algebr z jednością $\hat{f} : \mathcal{C}\ell(V,h) \to \mathcal{A}$.

Dowodzi się, że dla $m = 2n$ parzystego algebra $\mathcal{C}\ell(V,h)$ jest prosta, tzn. posiada jedną, z dokładnością do izomorfizmu, nieprzywiedlną i wierną reprezentację

$$\gamma : \mathcal{C}\ell(V,h) \to \operatorname{End} S$$

w 2^n-wymiarowej zespolonej przestrzeni *spinorów Diraca* S. (Uwaga: nazwa *spinor* pojawiła się dopiero w 1929 r.)

Macierze (endomorfizmy S) Diraca $\gamma_\mu = \gamma(e_\mu)$ spełniają

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2h_{\mu\nu}I, \quad h_{\mu\nu} = h(e_\mu, e_\nu).$$

Mnożąc, w razie potrzeby, $\gamma(\eta)$ przez i, otrzymujemy γ_{2n+1} takie, że $\gamma_{2n+1}^2 = I$ oraz rozkład

$$S = S_+ \oplus S_-$$

na przestrzenie spinorów chiralnych (Weyla), $S_\pm = \{\varphi \in S \mid \gamma_{2n+1}\varphi = \pm\varphi\}$. Jeśli $V = \mathbb{R}^m$, a h ma sygnaturę (k,l), $k+l = m$, gdzie k jest liczbą minusów w postaci kanonicznej h, to pisze się $\mathcal{C}\ell(k,l)$ zamiast $\mathcal{C}\ell(V,h)$. (Często występują sumy proste algebr; zamiast $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ pisze się $2\mathcal{A}$; $K(N)$ to algebra macierzy $N \times N$ o elementach w K.)

Przykłady:

$\mathcal{C}\ell^+(1,0) = \mathbb{R} \to \mathbb{C} = \mathcal{C}\ell(1,0)$ (można położyć $e_1 = \sqrt{-1}$)
$\mathcal{C}\ell^+(2,0) = \mathbb{C} \to \mathbb{H} = \mathcal{C}\ell(2,0)$ ($e_1 = \mathrm{i},\ e_2 = \mathrm{j},\ e_1e_2 = \mathrm{k}$)
$\mathcal{C}\ell^+(3,0) = \mathbb{H} \to 2\mathbb{H} = \mathcal{C}\ell(3,0)$ ($e_1 = (\mathrm{i}, -\mathrm{i})$ itd.); sygnatura istotna:
$\mathcal{C}\ell^+(0,2) = \mathbb{C} \to \mathbb{R}(2) = \mathcal{C}\ell(0,2)$ ($e_1 = \sigma_x,\ e_2 = \sigma_z$) itd.

Łatwo przejść od $\mathcal{C}\ell(k,l)$ do $\mathcal{C}\ell(k+1,l+1)$ przy pomocy odwzorowania liniowego

$$f : \mathbb{R}^{k+l} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}(2) \otimes \mathcal{C}\ell(k,l)$$

$$f(x,\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} x & \lambda \\ \mu & -x \end{pmatrix},$$

które ma własność Clifforda, $f(x,\lambda,\mu)^2 = (x^2 + \lambda\mu)I$ i przedłuża się do izomorfizmu algebr

$$\hat{f} : \mathcal{C}\ell(k+1,l+1) \to \mathbb{R}(2) \otimes \mathcal{C}\ell(k,l).$$

Można stąd znaleźć algebry Clifforda przestrzeni Minkowskiego:

$$\mathcal{C}\ell(3,1) = \mathbb{R}(2) \otimes \mathcal{C}\ell(2,0) = \mathbb{H}(2) \subset \mathbb{C}(4) \quad \text{zespolone spinory Diraca}$$

$$\mathcal{C}\ell(1,3) = \mathbb{R}(2) \otimes \mathcal{C}\ell(0,2) = \mathbb{R}(4) \quad \text{rzeczywiste spinory Majorany}$$

Algebry Clifforda $\mathcal{C}\ell^+(k,l) \to \mathcal{C}\ell(k,l)$ można znaleźć z „zegara spinorowego”, którego „godziny” to reszty z dzielenia $k-l$ przez 8:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "7"] & 2\mathbb{R} \arrow[r, "0"] & \mathbb{R} \arrow[d, "1"] \\
\mathbb{C} \arrow[u, "6"] & & \mathbb{C} \arrow[d, "2"] \\
\mathbb{H} \arrow[u, "5"] & 2\mathbb{H} \arrow[l, "4"'] & \mathbb{H} \arrow[l, "3"']
\end{tikzcd}$$

Zob. *Clifford algebras and their representations*
`http://www.fuw.edu.pl/~amt/amt2.pdf`

Zadanie: Znaleźć taki najmniejszy wymiar m, dla którego w przestrzeni $V = \mathbb{R}^m$ istnieją dwie formy kwadratowe h i h' o różnych sygnaturach, ale $\mathcal{C}\ell(V,h) = \mathcal{C}\ell(V,h')$ i $\mathcal{C}\ell^+(V,h) = \mathcal{C}\ell^+(V,h')$.

Lipschitz, jako pierwszy, wprowadził grupy zbudowane z „liczb Clifforda”, ale jego praca na ten temat z 1886 r. była mało znana; została przypomniana przez André Weila w postaci „listu” do Redakcji *Annals of Mathematics* **69** (1959) 247–251, podpisanego: R. Lipschitz (który zmarł w 1903 r.).

Claude Chevalley w *Algebraic Theory of Spinors* (1954) wprowadził pojęcie **grupy Clifforda**

$$\mathcal{GC\ell}(V,h) = \{a \in \mathcal{C\ell}(V,h) \mid a \text{ odwracalne i } aVa^{-1} = V\}$$

$$\mathcal{GC\ell}^{+}(V,h) = \mathcal{GC\ell}(V,h) \cap \mathcal{C\ell}^{+}(V,h).$$

Odwzorowanie $\mathrm{Ad}(a)$ określone przez $\mathrm{Ad}(a)x = axa^{-1}$ jest homomorfizmem, $\mathrm{Ad} : \mathcal{GC\ell}(V,h) \to \mathrm{O}(V,h)$. Ale czy wszystkie przekształcenia ortogonalne można tak otrzymać?

Niech $v \in V$ będzie wektorem niezerowym, $v^2 \neq 0$, $v^{\perp} = \{x \in V \mid xv + vx = 0\}$ jest hiperpłaszczyzną ortogonalną do v.

Wektor x można rozłożyć, $x = x^{\parallel} + x^{\perp}$, więc $x \mapsto -vxv^{-1} = -x^{\parallel} + x^{\perp}$ jest odbiciem w $v^{\perp}$, stąd $v \in \mathcal{GC\ell}(V,h)$.

Co zrobić ze znakiem minus?

Jeśli m parzyste, to $-vxv^{-1} = v\eta x(v\eta)^{-1}$, więc $\mathrm{Ad}(v\eta)$ jest odbiciem w $v^{\perp}$; biorąc pod uwagę, że zbiór wszystkich odbić generuje całą grupę $\mathrm{O}(V,h)$, jest surjekcja $\mathrm{Ad} : \mathcal{GC\ell}(V,h) \to \mathrm{O}(V,h)$.

Gdy m nieparzyste, obrazem Ad jest tylko grupa $\mathrm{SO}(V,h)$.

Z drugiej strony grupa $\mathcal{GC\ell}(V,h)$ jest za duża w tym sensie, że jeśli $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ to $a \in \mathcal{GC\ell}(V,h)$ i λa nakrywają ten sam element $\mathrm{O}(V,h)$. Niech β będzie antyautomorfizmem algebry takim, że $\beta(1) = 1$, $\beta(x) = x$ dla $x \in V$ oraz $\beta(ab) = \beta(b)\beta(a)$ dla $a, b \in \mathcal{C\ell}(V,h)$, to składowa spójna grupy spin

$$\mathrm{Spin}_0(V,h) = \{a \in \mathcal{GC\ell}^{+}(V,h) \mid \beta(a)a = 1\}$$

nakrywa $\mathrm{SO}_0(V,h)$ dwukrotnie. Grupa

$$\mathrm{Spin}(V,h) = \{a \in \mathcal{GC\ell}^{+}(V,h) \mid \beta(a)a \in \{1,-1\}\}$$

nakrywa dwukrotnie $\mathrm{SO}(V,h)$. Grupa $\mathrm{Spin}(V,h)$ jest spójna jeśli h jest formą określoną; dla $K = \mathbb{C}$ warunek unormowania jest $\beta(a)a = 1$ i wtedy grupa $\mathrm{Spin}(V,h)$ też jest spójna.

Są też grupy $\mathrm{Pin}(V,h)$ generowane przez wszystkie wektory jednostkowe; grupy te nakrywają $\mathrm{O}(V,h)$.

W rachunkach używamy zwykle macierzy; jeśli $a \in \mathrm{Spin}_0(V,h)$, a (e_μ) jest reperem w V, to

$$ae_\mu a^{-1} = e_\nu \rho^{\nu}{}_{\mu}(a), \quad \rho : \mathrm{Spin}_0(V,h) \to \mathrm{SO}_0(V,h)$$

Stąd $\gamma(a)\gamma_\mu\gamma(a^{-1}) = \gamma_\nu \rho^{\nu}{}_{\mu}(a)$. Podobnie $\gamma(a)\gamma^\mu\gamma(a^{-1}) = \rho^{\mu}{}_{\nu}(a^{-1})\gamma^\nu$ *gdzie* $\gamma^\mu = h^{\mu\nu}\gamma_\nu$

Wstawka na temat oznaczeń

S i T skończenie wymiar. przestrzenie wektorowe nad $K = \mathbb{R}$ albo $\mathbb{C}$,

0. „Odwzorowanie obliczania” $S \times S^* \ni (s, s^*) \mapsto \langle s, s^* \rangle \in K$.

1. Jeśli $f : S \to T$ liniowe, to $f^* : T^* \to S^*$ jest określone przez $\langle s, f^*(t^*)\rangle = \langle f(s), t^*\rangle$, gdzie $s \in S$, $t^* \in T^*$ (transpozycja).

2. Jest $\mathrm{Hom}(S,T) = S^* \otimes T, \quad S^{**} = S$ więc $\langle s, s^*\rangle = \langle s^*, s\rangle$.

3. Jeśli S zespolona, to przestrzeń wektorowa $\bar{S}$ składa się z tych samych wektorów co S; jeśli $s \in S$, to ten sam wektor w $\bar{S}$ oznacza się $\bar{s}$; mnożenie przez liczby zespolone: $\bar{\lambda} \underset{\bar{S}}{\cdot} \bar{s} = \overline{\lambda \underset{S}{\cdot} s}$, więc pisze się $\bar{\lambda}\bar{s} = \overline{\lambda s}$.

4. Jeśli $f : S \to T$, to $\bar{f} : \bar{S} \to \bar{T}$ dane przez $\bar{f}(\bar{s}) = \overline{f(s)}$; sprzężenie hermitowskie $f^\dagger = \bar{f}^*$; jeśli $T = \bar{S}^*$ i $f^\dagger = f$, to f hermitowskie.

5. Jeśli (e_A) jest reperem w S, $s = s^A e_A$, to $\bar{s} = \overline{s^A}\,\overline{e_A}$ zapisuje się zwykle jako $s^{\bar{A}} e_{\bar{A}}$. Jeśli $f : S \to \bar{S}^*$, to $f(e_A) = f_{A\bar{B}} e^{\bar{B}}$ i $f = f^\dagger \Leftrightarrow \overline{f_{A\bar{B}}} = f_{B\bar{A}}$ itd.

6. $S^\times = S \setminus \{0\}$

Jeśli V jest parzysto-wymiarowa, to na mocy prostoty algebry Clifforda, reprezentacja dualna

$$\check{\gamma} : \mathcal{C}\ell(V,h) \to \mathrm{End}\, S^*, \quad \check{\gamma}(a) = \gamma(\beta(a))^*$$

jest równoważna γ, więc istnieje izomorfizm $\mathsf{B} : S \to S^*$ taki, że $\gamma(\beta(a))^* = \mathsf{B}\gamma(a)\mathsf{B}^{-1}$. W szczególności,

$$\gamma_\mu^* = \mathsf{B}\gamma_\mu\mathsf{B}^{-1}$$

Jeśli $\varphi, \psi \in S$ i $a \in \mathrm{Spin}_0(V,h)$, to $\langle \gamma(a^{-1})\varphi, \mathsf{B}\gamma(a^{-1})\psi\rangle = \langle \varphi, \mathsf{B}\psi\rangle$ i

$$\langle \gamma(a^{-1})\varphi, \mathsf{B}\gamma_\mu\gamma(a^{-1})\psi\rangle = \langle \varphi, \mathsf{B}\gamma_\nu\psi\rangle \rho^\nu{}_\mu(a).$$

Reprezentacja sprzężona $\bar{\gamma} : \mathcal{C}\ell(V,h) \to \mathrm{End}\,\bar{S}$ jest także równoważna γ, więc istnieje odwzorowanie splatające $\mathsf{C} : S \to \bar{S}$ takie, że

$$\bar{\gamma}_\mu = \mathsf{C}\gamma_\mu\mathsf{C}^{-1}.$$

Można zawsze wybrać C tak, aby $\bar{\mathsf{C}}\mathsf{C} = \mathrm{id}_S$ (reprezentacja rzeczywista) albo $\bar{\mathsf{C}}\mathsf{C} = -\mathrm{id}_S$ (reprezentacja kwaternionowa). Odwzorowanie $\mathsf{A} : \bar{\mathsf{B}}\mathsf{C} : S \to \bar{S}^*$ przeprowadza macierze γ_μ na macierze hermitowsko sprzężone, $\gamma_\mu^\dagger = \bar{\gamma}_\mu^*$,

$$\gamma_\mu^\dagger = \mathsf{A}\gamma_\mu\mathsf{A}^{-1}.$$

Macierz $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}^\dagger$ komutuje ze wszystkimi γ_μ, więc istnieje $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ taka, że $\mathsf{A}^\dagger = \lambda\mathsf{A}$; sprzęgając otrzymuje się $\bar{\lambda}\lambda = 1$, więc macierz $\sqrt{\lambda}\mathsf{A}$ jest hermitowska. Można przyjąć, że A hermitowskie. Liczby

$$\langle \overline{\mathsf{A}\psi}, \psi\rangle, \quad \langle \overline{\mathsf{A}\psi}, \gamma^\mu\psi\rangle$$

są rzeczywiste. Fizycy zapisują spinor $\psi \in S$ w postaci kolumny, a spinor $\overline{\mathsf{A}\psi} \in S^*$ w postaci wiersza $\bar{\psi}$:

$$\bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

Uważa się, że historia spinorów zaczyna się od **É. CARTANa**

który znalazł, dla $m \geqslant 3$, reprezentacje algebr Liego $\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$ (1913) i $\mathfrak{so}(m, \mathbb{R})$ (1914) nie podnoszące się do reprezentacji odpowiednich grup; używał nazwy „reprezentacje fundamentalne". Dla $m = 2n$ i $2n+1$, te nowe reprezentacje mają wymiar 2^n.

Znacznie później wygłosił wykłady na temat spinorów i opublikował książkę (*Leçons sur la théorie des spineurs* 1938), w której wprowadził pojęcie spinorów prostych (obecnie nazywanych „czystymi"). Spinor $\phi \in S^\times$ jest czysty, jeśli wymiar przestrzeni

$$N(\phi) = \{z \in \mathbb{C} \otimes V \mid \gamma(z)\phi = 0\}$$

jest maksymalny, tzn. n dla $\dim V = 2n$ albo $2n + 1$. Na mocy $\gamma(z)^2 = h(z, z)$ przestrzeń $N(\phi)$ jest całkowicie zerowa.

Wchodzą fizycy: **PAULI 1927 DIRAC 1928**

Po odkryciu spinu elektronu (Uhlenbeck i Goudsmit 1925) był okres intensywnej pracy najwybitniejszych teoretyków (Heisenberg, Jordan, Kronig...), którego kulminacją był artykuł Pauliego
Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons Z. Phys. **43** (1927),
w którym wprowadza do opisu elektronu funkcję falową o dwóch składowych, macierze sigma i operatory

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B} + e\phi, \quad \mathbf{j} = \boldsymbol{\ell} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}.$$

Współczynnik żyromagnetyczny e/m postulowany na podstawie obserwacji. (Tutaj i w dalszym ciągu $\hbar = 1$, $c = 1$.)

P. A. M. Dirac w pracy
The quantum theory of the electron Proc. Roy. Soc. A **117** (1928) 610
wprowadza relatywistyczne równanie na funkcję falową ψ o 4 składowych; w oznaczeniach Pauliego

$$(\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu) - m)\psi = 0 \tag{D}$$

Motywacja w duchu Clifforda: „zlinearyzować" operator Kleina–Gordona (a raczej wyrazić $\Box$ w postaci kwadratu operatora różniczkowego pierwszego rzędu).

Sukcesy: wyjaśnienie e/m, widmo energii atomu wodoru, przewidzenie antycząstek: wprowadzając sprzężoną ładunkowo funkcję falowa $\psi_c = C^{-1}\bar{\psi}$ i sprzęgając (D) otrzymuje się

$$(\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu) - m)\psi_c = 0.$$

Niezależnie od Diraca, w kilka miesięcy po jego pracy, D. D. Ivanenko i L. D. Landau zaproponowali inny operator różniczkowy pierwszego rzędu, zamiast operatora Diraca, a mianowicie (we współczesnych oznaczeniach) $\mathrm{d}+\delta$, gdzie $\delta = \star\mathrm{d}\star$ jest „koróżniczką”. Wobec sukcesów równania Diraca, ta praca nie wywarła żadnego wpływu; operator $\mathrm{d}+\delta$ został ponownie odkryty przez Ericha Kählera (1960).

Według B. L. van der Waerdena nazwa *spinor* była użyta po raz pierwszy przez Paula Ehrenfesta w 1929 r.

Lokalna teoria spinorów w OTW: **WEYL, FOCK 1929**

Wkrótce po 1928 r. ukazały się prace uogólniające równanie Diraca do OTW.

Zakłada się, że na rozmaitości M z tensorem metrycznym g o tej samej sygnaturze co h na V, jest globalne pole koreperów ortonormalnych (θ^μ). Tensor metryczny jest $g = h_{\mu\nu}\theta^\mu \otimes \theta^\nu$, a koneksja określona przez 1-formy $(\omega_{\mu\nu})$ takie, że $\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$ (metryczność) i $\mathrm{d}\theta^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \theta^\nu = 0$ (brak skręcenia; nieistotne). Pola wektorów (tensorów) i spinorów to funkcje $X = (X^\mu) : M \to \mathbb{R}^m$ i $\psi : M \to S$ odpowiednio przekształcające się przy zmianie pola reperów: jeśli $a : M \to \mathrm{Spin}_0(V,h)$, to składowe względem pola $\theta'^\mu = \rho^\mu{}_\nu(a^{-1})\theta^\nu$ są $X'^\mu = \rho^\mu{}_\nu(a^{-1})X^\nu$ i $\psi' = \gamma(a^{-1})\psi$. (Tu widoczna trudność; przykład $\mathbb{S}_2$.)

Pochodna kowariantna zewnętrzna pola wektorowego,

$$DX^\mu = \mathrm{d}X^\mu + \omega^\mu{}_\nu X^\nu = \theta^\nu \nabla_\nu X^\mu$$

Podobnie dla pola spinorów

$$D\psi = \mathrm{d}\psi + \omega\psi$$

gdzie ω jest 1-formą o wartościach w $\mathrm{End}\, S$, więc można ją przedstawić w postaci

$$\omega = \underset{0}{\omega} I + \underset{1}{\omega}{}^\mu \gamma_\mu + \underset{2}{\omega}{}^{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu + \dots \qquad \text{(omega)}$$

Jeśli φ i ψ są polami spinorowymi, to $\langle \varphi, \mathsf{B}\gamma^\mu\psi\rangle$ jest polem wektorowym, więc

$$D\langle \varphi, \mathsf{B}\gamma^\mu\psi\rangle = \mathrm{d}\langle \varphi, \mathsf{B}\gamma^\mu\psi\rangle + \omega^\mu{}_\nu\langle \varphi, \mathsf{B}\gamma^\nu\psi\rangle$$

a reguła Leibniza daje

$$D\langle \varphi, \mathsf{B}\gamma^\mu\psi\rangle = \langle D\varphi, \mathsf{B}\gamma^\mu\psi\rangle + \langle \varphi, \mathsf{B}\gamma^\mu D\psi\rangle.$$

Stąd, na mocy dowolności φ i ψ jest $\omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu = \mathsf{B}^{-1}\omega^*\mathsf{B}\gamma^\mu + \gamma^\mu\omega$. Wstawiając tu rozwinięcie (omega) otrzymuje się $\underset{k}{\omega} = 0$ dla $k \neq 2$ oraz

$$\omega = \tfrac{1}{4}\omega^{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu \quad \text{więc} \quad D\psi = \mathrm{d}\psi + \tfrac{1}{4}\omega^{\mu\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi.$$

Nowoczesne ujęcie spinorów na rozmaitościach o nietrywialnej topologii polega na wprowadzeniu **struktury spinorowej** jako rozszerzenia wiązki reperów ortonormalnych P do grupy Spin:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}(V,h) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}"'] & Q \arrow[d, "\chi"] & \\
\mathrm{SO}(V,h) \arrow[r] & P \arrow[r, "\pi"] & M
\end{tikzcd}$$

gdzie $\chi(qa) = \chi(q)\,\mathrm{Ad}(a)$, $q \in Q$, $a \in \mathrm{Spin}(V,h)$. Pole spinorowe to $\psi : Q \to S$ takie, że $\psi(qa) = \gamma(a^{-1})\psi(q)$. Możliwe przeszkody. Koneksję spinorową otrzymuje się przez podniesienie koneksji L-C z P do Q.

Przykład: struktury spinorowe na sferach.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spin}(m) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}"'] & Q = \mathrm{Spin}(m+1) \arrow[d, "\chi=\mathrm{Ad}"] & \\
\mathrm{SO}(m) \arrow[r] & P = \mathrm{SO}(m+1) \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{S}_m
\end{tikzcd}$$

$m = 1, 2, \ldots$. Okrąg $\mathbb{S}_1$ ma dwie nierównoważne takie struktury; oprócz tej danej powyżej jest struktura trywialna, $Q = \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SO}(2)$.

Interesujące są koneksje spinorowe na $\mathbb{S}_2$ (potencjał monopola magnetycznego Diraca o najmniejszym $\neq 0$ ładunku magnetycznym) oraz na $\mathbb{S}_4$: tutaj $\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, $Q = \mathrm{Spin}(5) = \mathrm{Sp}(2)$, są dwie wiązki główne („lewa i prawa”) nad $\mathbb{S}_4$, każda o grupie strukturalnej $\mathrm{SU}(2)$ i przestrzeni wiązki $\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{SU}(2) = \mathbb{S}_7$; koneksja spinorowa ma wartości w $\mathrm{su}(2) \oplus \mathrm{su}(2)$ i jej składowe określają dwa pola cechowania na $\mathbb{S}_4$ (instanton i antyinstanton BPST).

Równania Laplace'a i Diraca na sferach

Rozpatrujemy $\mathbb{S}_m \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Wprowadzając $r = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^{m+1})^2}$ mamy

$$\Delta_{\mathbb{R}^{m+1}} = r^{-2}\Delta_{\mathbb{S}_m} + r^{-m}\tfrac{\partial}{\partial r} r^m \tfrac{\partial}{\partial r}$$

więc jeśli φ jest harmonicznym wielomianem jednorodnym stopnia l zmiennych $x^1, \ldots, x^{m+1}$, to $0 = \Delta_{\mathbb{S}_m}\varphi + l(l+m-1)\varphi = 0$, co daje widmo $\{-l(l+m-1) \mid l = 0, 1, 2, \ldots\}$ operatora Laplace'a na $\mathbb{S}_m$.

Podobnie, kładąc $N = \gamma_\mu x^\mu / r$, $\mu = 1, \ldots, m+1$ i wprowadzając operator Diraca $\mathsf{D} = \gamma^k \nabla_k$ na $\mathbb{S}_m$ mamy

$$\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = r^{-1}\mathsf{D} + N r^{-m/2} \frac{\partial}{\partial r} r^{m/2}$$

Jeśli $\phi : \mathbb{R}^{m+1} \to S$ jest wielomianem harmonicznym stopnia $l+1$, to $\psi = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi$ jest stopnia l oraz $\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi = 0$. Stąd widmo $\pm(l + m/2)$, $l = 0, 1, 2 \ldots$. Dla $m = 1$ to daje widmo dla struktury nie trywialnej; dla trywialnej jest $\pm l$.

Algebra spinorów w 4 wymiarach:

B. L. van der WAERDEN 1929, O. VEBLEN 1933

Podstawowa cegiełka dla tej algebry to zespolona przestrzeń unimodularna (S, ϵ):

$$\dim_{\mathbb{C}} S = 2, \quad \epsilon : S \to S^* \text{ antysymetryczny izomorfizm}$$

Dla każdego $a \in \operatorname{End} S$ jest $a^* \epsilon a = \epsilon \det a$

Izomorfizm ϵ splata równoważne reprezentacje grupy $\mathrm{SL}(S)$ w S i S^*; ta druga to reprezentacja dualna (kontragredientna) względem pierwszej: jeśli $a \in \mathrm{SL}(S)$, to

$$\epsilon a \epsilon^{-1} = a^{*-1}$$

Jest jeszcze reprezentacja $\mathrm{SL}(S)$ w $\bar{S}^*$ dana przez $(a^\dagger)^{-1}$.

(Chwilowe) uproszczenie: utożsamiając S z $\mathbb{C}^2$, można (częściowo) zapomnieć o różnicach między S, S^* i $\bar{S}$ i pójść na skróty w wyprowadzeniach.

Grupa $\mathrm{Spin}(4, \mathbb{C})$

Niech $z = (z^0, z^1, z^2, z^3) \in \mathbb{C}^4$ oraz $\sigma : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}(2)$ izomorfizm taki, że

$$\sigma(z) = \begin{pmatrix} z^0 + \mathrm{i}z^3 & \mathrm{i}z^1 + z^2 \\ \mathrm{i}z^1 - z^2 & z^0 - \mathrm{i}z^3 \end{pmatrix}, \quad \text{to} \quad \det \sigma(z) = (z^0)^2 + (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2.$$

Jeśli $a, b \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, to $\det a\sigma(z)b^{-1} = \det \sigma(z)$, co daje $\mathrm{Spin}(4, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Aby otrzymać grupy Spin 4-wymiarowych przestrzeni rzeczywistych, zanurzamy $i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^4$, tak aby $\det \sigma(i(x))$ było rzeczywistą formą kwadratową. W dalszym zapisie i pomijane, tzn. $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}(2)$.

Grupa $\mathrm{Spin}_0(2,2)$

Niech

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - x^2 \\ x^1 + x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad \text{to} \quad \det \sigma(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Stąd $\mathrm{Spin}_0(2,2) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Przestrzeń spinorów Diraca to $S \oplus S'$, gdzie obie przestrzenie S i S' są 2-wymiarowe rzeczywiste.

Grupa $\mathrm{Spin}_0(3,1)$

Niech

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \mathrm{i}x^2 \\ x^1 + \mathrm{i}x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad \text{to} \quad \det \sigma(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Macierz $\sigma(x)$ jest hermitowska dla każdego x; aby macierz $a\sigma(x)b^{-1}$, gdzie $a, b \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ była także hermitowska potrzeba i wystarcza, aby $b^{-1} = a^\dagger$; stąd $\mathrm{Spin}_0(3,1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Homomorfizm $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_0(3,1)$ jest określony przez

$$a\sigma(x)a^\dagger = \sigma(\rho(a)x), \quad a \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

Niech π i τ oznaczają odbicia: $\pi(t, \mathbf{r}) = (t, -\mathbf{r})$ i $\tau(t, \mathbf{r}) = (-t, \mathbf{r})$, to

$$\sigma(\pi(x)) = \epsilon\overline{\sigma(x)}\epsilon^{-1}, \quad \sigma(\tau(x)) = -\epsilon\overline{\sigma(x)}\epsilon^{-1}$$

więc nie można liniowo zrealizować odbić w 2-wymiarowej przestrzeni spinorów.

Wobec $\sigma(x)^*\epsilon\sigma(x) = \epsilon \det \sigma(x)$ można wziąć

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(x) \\ \epsilon^{-1}\sigma(x)^*\epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

bo wtedy $\gamma(x)^2 = \det \sigma(x) \mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}$.

Grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ działa w przestrzeni spinorów Diraca $\mathbb{C}^4$ za pośrednictwem macierzy

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}$$

W tym ujęciu przestrzeń spinorów Diraca (bispinorów) można utożsamić z $S \oplus \bar{S}^*$.

Biorąc pod uwagę

$$\epsilon^{-1}\sigma_k^*\epsilon = -\sigma_k, \quad k = 1, 2, 3$$

widać, że macierze Diraca $\gamma_\mu = \gamma(e_\mu)$ mają postać (reprezentacja chiralna)

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{stąd} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Odwzorowania splatające:

$$\mathsf{A} = \gamma_0, \quad \mathsf{B} = \gamma_1\gamma_3, \quad \mathsf{C} = \gamma_3\gamma_1\gamma_0$$

Reprezentacja Diraca („niskoenergetyczna”, rozkład bispinora na „małe” i „duże” składowe):

$$'\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad '\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad '\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie: Znaleźć $U \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$ takie, że $'\gamma_\mu = U\gamma_\mu U^{-1}$.

Wracamy do reprezentacji chiralnej. Przestrzeń spinorów Diraca $S \oplus \bar{S}^*$ niesie reprezentację pełnej algebry Clifforda, więc także grupy $\mathrm{Pin}(3,1)$, która jest rozszerzeniem grupy $\mathrm{Spin}(3,1)$ o odbicia: przestrzenne $\pm P$ i czasowe $\pm T$. Reprezentacja ta jest generowana przez macierze

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

które nakrywają $\mathrm{SO}_0(3,1)$ oraz macierze

$$\gamma(P) = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \gamma(T) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

które nakrywają, odpowiednio, odbicia przestrzenne π i czasowe τ. Wynika stąd, że cztery składowe spójne grupy $\mathrm{Pin}(3,1)$ składają się, w tej reprezentacji z macierzy

$$\mathrm{Spin}(3,1): \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{i}a & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}(a^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{zawiera } PT$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}(a^\dagger)^{-1} \\ -\mathrm{i}a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{zawiera } T, \quad \begin{pmatrix} 0 & (a^\dagger)^{-1} \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{zawiera } P$$

Można też używać przestrzeni $S \oplus \bar{S}$ jako przestrzeni spinorów Diraca:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Przekształcone macierze Diraca mają postać

$$\gamma_0' = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{-1} \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k' = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k\epsilon^{-1} \\ -\epsilon\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

Algebra $\mathcal{C}\ell(1,3)$ jest rzeczywista, więc grupa $\mathrm{Pin}(1,3)$ ma reprezentację 4-wymiarową rzeczywistą. Można użyć reprezentacji chiralnej danej przez macierze $\gamma''_\mu = \mathrm{i}\gamma'_\mu$. Identyfikując S z $\mathbb{R}^4$ przez odwzorowanie

$$S = \mathbb{C}^2 \ni u \mapsto (\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in \mathbb{R}^4$$

można odbicia zrealizować „antyliniowo” w przestrzeni S:

$$P : u \mapsto \mathrm{i}\epsilon^{-1}\bar{u}, \quad T : u \mapsto \epsilon\bar{u}$$

Zadanie: Wyjaśnić dlaczego nie można tego zrobić w sygnaturze $(3,1)$.

Uwaga: nie należy tego mylić z antyliniowością odbicia czasu w mechanice kwantowej:

$$(T_{\text{q.m.}}\psi)(t,\mathbf{r}) = T\psi_c(-t,\mathbf{r}), \qquad C_{\text{q.m.}}\psi = \psi_c = C^{-1}\bar{\psi}$$

W tych oznaczeniach kwantowo-polowe twierdzenie $C_{\text{q.m.}}PT_{\text{q.m.}}$ to twierdzenie PT, które pochodzi stąd, że pełne odbicie czasoprzestrzenne $\pi \circ \tau$ należy do grupy $\mathrm{SO}(3,1)$, a po kompleksyfikacji do spójnej grupy $\mathrm{SO}(4,\mathbb{C})$.

Grupa Spin(4)

Niech

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x^0 + \mathrm{i}x^3 & \mathrm{i}x^1 + x^2 \\ \mathrm{i}x^1 - x^2 & x^0 - \mathrm{i}x^3 \end{pmatrix}, \quad \text{to} \quad \det\sigma(z) = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Macierz $\sigma(x)$ jest scharakteryzowana równaniem $\overline{\sigma(x)} = \epsilon\sigma(x)\epsilon^{-1}$; ta własność jest zachowywana przy $\sigma(x) \mapsto a\sigma(x)b^{-1}$, gdzie $a, b \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, wtedy i tylko wtedy, gdy obie macierze a i b są unitarne; stąd $\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$. Przestrzeń spinorów Diraca to $S \oplus S'$.

Równoważność reprezentacji spinorowych w 4 wymiarach

Ze względu na prostotę pełnej algebry Clifforda rzeczywistej przestrzeni 4-wymiarowej, reprezentacje γ, $\check{\gamma}$ i $\bar{\gamma}$ są równoważne. Wygodnie jest oznaczać reprezentacje algebr i grup przy pomocy przestrzeni wektorowych, w których się one realizują. W szczególności, oznaczając przez S i S' reprezentacje chiralne parzystej algebry Clifforda, mamy dla tej algebry także reprezentacje S^*, $\bar{S}$, $\bar{S}^*$ i S'^*, $\bar{S}'$, $\bar{S}'^*$.

Reprezentacje S i S' są nierównoważne, a każda inna jest równoważna jednej z tych dwóch.

Zawsze jest $S \sim S^*$ oraz $S' \sim S'^*$ (unimodularność).

W sygnaturze $(3,1)$ jest $S' \sim \bar{S}$

W sygnaturach $(2,2)$ i $(0,4)$ jest $S \sim \bar{S}$.

Są różne tradycje oznaczania wskaźników reperów w $\bar{S}$ biorące za punkt wyjścia e_A w S i e^A w S^*, mianowicie: $e_{\dot{A}}$ (van der W., Veblen);

$e_{A'}$ (Penrose); $e_{\bar{A}}$ (tu przyjęte). Notacja Penrose'a jest dostosowana do sygnatury $(3,1)$.

Wprowadzając repery mamy

$$\sigma(x)e_A = x^\mu \sigma_{\mu A\bar{B}} e^{\bar{B}}, \quad \overline{\sigma_{\mu A\bar{B}}} = \sigma_{\mu B\bar{A}}$$

oraz

$$\sigma_{\mu A\bar{C}}\sigma_{\nu B\bar{D}}\epsilon^{\bar{C}\bar{D}} = \epsilon_{AB}h_{\mu\nu}$$
$$h^{\mu\nu}\sigma_{\mu A\bar{C}}\sigma_{\nu B\bar{D}} = \epsilon_{AB}\epsilon_{\bar{B}\bar{D}}$$

Macierze Pauliego $(\sigma^\mu{}_{A\bar{B}})$ splatają reprezentacje grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ w $S\otimes\bar{S}$ i w $V=\mathbb{R}^4$. Dzięki temu, V można utożsamić z częścią rzeczywistą przestrzeni $S\otimes\bar{S}$, rozpinaną przez wszystkie iloczyny $\varphi\otimes\bar{\varphi}$.

Przedstawianie tensorów przy pomocy spinorów (sygnatura Minkowskiego)

Rachunek spinorowy **Rogera PENROSE'a 1960**

R. Penrose & W. Rindler, Spinors and space-time vol. 1 and 2, Cambridge Univ. Press 1984 and 1986.

Względem unimodularnego reperu (e_A), $A=1,2$

$$\epsilon(e_A) = \epsilon_{AB}e^B, \quad \epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0, \;\; \epsilon_{12}=-\epsilon_{21}=1$$

Wskaźniki opuszcza się i podnosi przy pomocy ϵ_{AB} i ϵ^{AB}; zgodnie z konwencją Penrose'a

$$\epsilon^{-1}(e^A) = e_B\epsilon^{BA}, \quad \text{stąd} \quad \epsilon_{AC}\epsilon^{BC} = \delta_A^B$$

Głównym narzędziem „algebry spinorów" są twierdzenia o rozkładaniu reprezentacji grupy $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ na składowe nieprzywiedlne; reprezentacje o trywialnym jądrze określają także odpowiednią reprezentację „tensorową" grupy $\mathrm{SO}_0(3,1)$.

Reprezentacja $\wedge^2 S$ jest trywialna (bo $\varphi_{[AB]} = \epsilon_{AB}\varphi_{[12]}$). Wystarczy zajmować się reprezentacjami w przestrzeniach spinorów symetrycznych

$$S^p = \odot^p S \quad \text{(symetryczny iloczyn tensorowy)},$$

oraz $\bar{S}^p$, gdzie $p=0,1,2,\ldots$. We wskaźnikach: element S^p to spinor $\varphi^{A_1\ldots A_p} = \varphi^{(A_1\ldots A_p)}$, $\dim S^p = p+1$. Reprezentacja trywialna $S^0=\mathbb{C}$.

Podstawowe twierdzenia: 1. jeśli W jest skończenie wymiarową, zespoloną i nieprzywiedlną reprezentacją grupy $SL(2,\mathbb{C})$, to istnieją liczby całkowite $p,q=0,1,\ldots$ takie, że

$$W\sim S^p\otimes\bar{S}^q.$$

W literaturze fizycznej taką reprezentację oznacza się zwykle jako $(\frac{p}{2},\frac{q}{2})$. Jeżeli $p+q$ parzyste, to mamy nawet reprezentację grupy $\mathrm{SO}_0(3,1)$.
2. Rozkład iloczynu tensorowego („prawo składania momentów pędu"):

$$S^p\otimes S^q = S^{p+q}\oplus S^{p+q-2}\oplus\cdots\oplus S^{|p-q|}.$$

Szkic dowodu: mając $\varphi \in S^p$ i $\psi \in S^q$, spinor $\varphi^{(A_1 \ldots A_p}\psi^{B_1 \ldots B_q)}$ jest w S^{p+q}, a spinor

$$\varphi^{A_1(A_2 \ldots A_p}\psi^{B_1 \ldots B_{q-1})B_q}\epsilon_{A_1 B_q} \tag{p+q-2}$$

jest w S^{p+q-2}, itd. Jeśli $p = q$ i $\varphi = \psi$, to spinor rzędu $p + q - 2$ znika, stąd otrzymuje się rozkład

$$S^p \odot S^p = S^{2p} \oplus S^{2p-4} \oplus \cdots \oplus \begin{cases} S^0 & p \text{ parzyste} \\ S^2 & p \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

Jak otrzymywać reprezentacje rzeczywiste? Jeśli reprezentacja $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$ jest rzeczywista, tzn jeśli istnieje odwzorowanie liniowe $C : W \to \bar{W}$ takie, że $\overline{\rho(a)} = C\rho(a)C^{-1}$ i $\bar{C}C = \mathrm{id}_W$, to przestrzeń $\operatorname{Re} W = \{w \in W \mid \bar{w} = Cw\}$ jest nośnikiem rzeczywistej reprezentacji G i wtedy $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} W = \dim_{\mathbb{C}} W$. Jeśli reprezentacja W nie jest rzeczywista, to można utworzyć reprezentację rzeczywistą $\operatorname{Re}(W \oplus \bar{W})$ o dwukrotnie większym wymiarze. Reprezentacja $W \otimes \bar{W}$ jest zawsze rzeczywista.

Przykłady

1. Niech będzie dane (S, ϵ), to $W = S \otimes \bar{S}$ jest czterowymiarowa zespolona; można określić iloczyn skalarny h w W kładąc

$$h(\varphi_1 \otimes \bar{\psi}_1, \varphi_2 \otimes \bar{\psi}_2) = \epsilon(\varphi_1, \varphi_2)\overline{\epsilon(\psi_1, \psi_2)}$$

Ten iloczyn jest rzeczywisty na $\operatorname{Re} W$ bo $h(\varphi_1 \otimes \bar{\varphi}_1, \varphi_2 \otimes \bar{\varphi}_2) = \epsilon(\varphi_1, \varphi_2)\overline{\epsilon(\varphi_1, \varphi_2)}$. Mając reper („diadę”) (e_1, e_2) w S, wprowadzamy reper zerowy $(k, l, m, \bar{m})$ w W:

$$k = e_1 \otimes \overline{e_1} = e_1 \otimes e_{\bar{1}}, \quad l = e_2 \otimes e_{\bar{2}}, \quad m = e_1 \otimes e_{\bar{2}}$$

więc sygnatura h jest $(3, 1)$.

Każdy wektor $X \in W$ ma spinorowe przedstawienie $X^{A\bar{B}} = X^\mu \sigma_\mu^{A\bar{B}}$; $X = \bar{X} \Leftrightarrow \overline{X^{A\bar{B}}} = X^{B\bar{A}}$; X jest zerowe $\Leftrightarrow X^{A\bar{B}} = \varphi^A \psi^{\bar{B}}$ (na podstawie wzoru na $\det \sigma(X)$) więc wektor $\varphi^A \varphi^{\bar{B}}$ jest zerowy i rzeczywisty.

Wskaźniki spinorowe można obniżać i podnosić przy pomocy ϵ_{AB} i ϵ^{AB}, co wyraża równoważność reprezentacji S i S^*. Można więc do opisu wektora użyć macierzy $X^A_{\bar{B}}$.

2. Iloczyn

$$W \otimes W = S \otimes \bar{S} \otimes S \otimes \bar{S} = S^0 \oplus (S^2 \oplus \bar{S}^2) \oplus S^2 \otimes \bar{S}^2.$$

można rozłożyć „tensorowo”

$$X^\mu Y^\nu = \tfrac{1}{4} h^{\mu\nu} h_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta + X^{[\mu}Y^{\nu]} + (X^{(\mu}Y^{\nu)} - \tfrac{1}{4} h^{\mu\nu} h_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta)$$

(wymiary: 16 = 1 + 6 + 9)
i „spinorowo”:

$$X^A_{\bar{C}} Y^B_{\bar{D}} = X^{[A}_{[\bar{C}} Y^{B]}_{\bar{D}]} + X^{(A}_{[\bar{C}} Y^{B)}_{\bar{D}]} + X^{[A}_{(\bar{C}} Y^{B]}_{\bar{D})} + X^{(A}_{(\bar{C}} Y^{B)}_{\bar{D})}$$

Przestrzenie S^2 i $\bar{S}^2$ odpowiadają przestrzeniom biwektorów samo- i antysamodualnych, co wynika z równości wymiarów tych nieprzywiedlnych reprezentacji oraz reprezentacji $\wedge^2_+ \mathbb{C}^4$ i $\wedge^2_+ \mathbb{C}^4$, gdzie $\wedge^2_\pm \mathbb{C}^4 = \{F \mid \star F = \pm \mathrm{i} F\}$.

„Tłumaczenie" tensorów na spinory można zilustrować na przykładzie biwektorów:

$$F^{\mu\nu}\sigma_{\mu A\bar{C}}\sigma_{\mu B\bar{D}} = F_{AB\bar{C}\bar{D}}$$

Uwaga: Penrose w takich wzorach pomija macierze Pauliego i pisze $F^{\mu\nu} = F_{AB\bar{C}\bar{D}}$.

Rozkładamy

$$F_{AB\bar{C}\bar{D}} = F_{(AB)(\bar{C}\bar{D})} + \epsilon_{AB}F_{[12](\bar{C}\bar{D})} + \epsilon_{\bar{C}\bar{D}}F_{(AB)[\bar{1}\bar{2}]} + \epsilon_{AB}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}}F_{[12][\bar{1}\bar{2}]}$$

Na mocy $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ wyrażenie $F_{AB\bar{C}\bar{D}}$ zmienia znak przy równoczesnej zamianie $A \rightleftarrows B$ i $\bar{C} \rightleftarrows \bar{D}$, co pociąga

$$F_{(AB)(\bar{C}\bar{D})} = 0 \;\;\&\;\; F_{[12][\bar{1}\bar{2}]} = 0.$$

Oznaczając $\phi_{AB} = F_{(AB)[\bar{1}\bar{2}]}$ i $\psi_{\bar{C}\bar{D}} = F_{[12](\bar{C}\bar{D})}$ mamy

$$F^{\mu\nu}\sigma_{\mu A\bar{C}}\sigma_{\mu B\bar{D}} = \epsilon_{AB}\psi_{\bar{C}\bar{D}} + \epsilon_{\bar{C}\bar{D}}\phi_{AB}$$

$$\star F^{\mu\nu}\sigma_{\mu A\bar{C}}\sigma_{\mu B\bar{D}} = \mathrm{i}\epsilon_{AB}\psi_{\bar{C}\bar{D}} - \mathrm{i}\epsilon_{\bar{C}\bar{D}}\phi_{AB}.$$

Jeśli $F^{\mu\nu}$ jest rzeczywiste, to $\overline{F_{AB\bar{C}\bar{D}}} = F_{CD\bar{A}\bar{B}} \;\;\Rightarrow\;\; \overline{\phi_{AB}} = \psi_{\bar{A}\bar{B}}$. Wprowadzając $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{B}$ otrzymuje się

$$(\phi_{AB}) = \begin{pmatrix} -F_x + \mathrm{i}F_y & F_z \\ F_z & F_x + \mathrm{i}F_y \end{pmatrix}.$$

Zadanie: znaleźć tensorową postać reprezentacji $\bar{S} \otimes S^5 + $ c.c..

Oznaczenie symetrycznych iloczynów tensorowych: $2uv$ zamiast $u\otimes v + v\otimes u$, u^2 zamiast $u \otimes u$ (podobnie jak w geometrii: $2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$)

$k \otimes m = e_1 \otimes e_{\bar{1}} \otimes e_1 \otimes e_{\bar{2}} = e_1^2 \otimes e_{\bar{1}} \wedge e_{\bar{2}} + e_1^2 \otimes e_{\bar{1}}e_{\bar{2}}$
$m \otimes k = e_1 \otimes e_{\bar{2}} \otimes e_1 \otimes e_{\bar{1}} = e_1^2 \otimes e_{\bar{2}} \wedge e_{\bar{1}} + e_1^2 \otimes e_{\bar{1}}e_{\bar{2}}$
stąd $k \wedge m = e_1^2$ gdyż $e_{\bar{1}} \wedge e_{\bar{2}}$ jest niezmiennikiem.

Podobnie $l \wedge \bar{m} = e_2^2$ oraz $k \wedge l + \bar{m} \wedge m = e_1 e_2$.

3. Rozkład tensora krzywizny (Riemanna)

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{[\mu\nu][\rho\sigma]}$$

i

$$R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0$$

więc w 4 wymiarach $\frac{6.7}{2} - 1 = 20$ składowych. Rozkłada się na tensor Weyla C, bezśladową część tensora Ricciego i skalar (10+9+1).

$$(S^2 \oplus \bar{S}^2) \odot (S^2 \oplus \bar{S}^2) = S^4 \oplus (S^2 \otimes \bar{S}^2) \oplus S^0 + \text{c.c}$$

W oznaczeniach Penrose'a: spinor $\Psi^{ABCD} e_A e_B e_C e_D \in S^4$ odpowiada samodualnej części $C - \mathrm{i} * C$ tensora Weyla, spinor przedstawiający $R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R$ to $\Phi_{AB\bar{C}\bar{D}} = \overline{\Phi_{CD\bar{A}\bar{B}}}$.

Klasyfikacja Cartana–Petrowa–Penrose'a: $\Psi^{ABCD} = \varphi^{(A}\psi^B\pi^C\omega^{D)} \neq 0$, koincydencje kierunków spinorów. Każdy ze spinorów, na które rozkłada się Ψ określa jeden z (czterech, na ogół) głównych kierunków zerowych (*gkz*) tensora C.

Niech e_1 określa *gkz* rozpinany przez $k = e_1 e_{\bar{1}}$. Wybierając e_2 tak, aby (e_1, e_2) był reperem w S, można spinor Weyla opisać przez jego składowe.

$\Psi_0 = \Psi^{2222}$ skoro kierunek $k = e_1 e_{\bar{1}}$ *gkz*, to $\Psi_0 = 0$

$\Psi_1 = \Psi^{1222}$ jeśli $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ to kierunek k jest powtórzonym *gkz*

$\Psi_2 = \Psi^{1122}$ jeśli $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$ to kierunek k jest przynajmniej potrójnym *gkz*

$\Psi_3 = \Psi^{1112}$ jeśli $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$ to kierunek k jest poczwórnym (*gkz*) (typ N)

$\Psi_4 = \Psi^{1111}$

Tensor $(k \wedge m) \otimes (k \wedge m) = e_1^4$ jest typu N

$(k \wedge m) \odot (k \wedge l + \bar{m} \wedge m) = e_1^3 e_2$ jest typu III

$(k \wedge l + \bar{m} \wedge m) \otimes (k \wedge l + \bar{m} \wedge m) + (k \wedge m) \odot (l \wedge \bar{m}) = e_1^2 e_2^2$ jest typu D.

4. Biorąc pod uwagę, że pochodna (kowariantna) zachowuje się jak wektor, oznaczając $\nabla_{A\bar{B}} = \sigma^{\mu}_{A\bar{B}} \nabla_{\mu}$, można użyć podobnych wzorów do rozkładu $\nabla_{A\bar{B}}\phi$ gdzie teraz $\phi : M \to W$ jest polem przekształcającym się według reprezentacji W. Np. jeśli $W = S \otimes \bar{S}$ (ϕ jest polem wektorowym), to rozkład daje dywergencję, $\mathrm{d}\phi$ oraz lewą stronę równania na konforemny wektor Killinga. Dla S^2 (2-formy) otrzymuje się lewą stronę równania na konforemny tensor Yano–Killinga oraz próżniowe równania Maxwella

$$\nabla^{\bar{A}}_{B} \phi^{BC} = 0$$

czyli

$$\begin{pmatrix} \partial_t + \partial_z & \partial_x - \mathrm{i}\partial_y \\ \partial_x + \mathrm{i}\partial_y & \partial_t - \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_x + \mathrm{i}F_y & F_z \\ F_z & F_x + \mathrm{i}F_y \end{pmatrix} = 0$$

co jest równoważne $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, $\mathrm{i}\partial_t \mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{F}$, gdzie $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{B}$.

Twistory według R. PENROSE'a (1967)

Ale nawet $W = S$ ($\phi =$ pole spinorów chiralnych) jest ciekawe: w rozkładzie $(S \otimes \bar{S}) \otimes S = \bar{S} \oplus (S^2 \otimes \bar{S})$ pierwszy człon daje równanie Weyla, a drugi – wprowadzone przez Penrose'a **równanie twistorowe**

$$\nabla^{(A}_{\bar{C}} \phi^{B)} = 0.$$

Równanie twistorowe jest równoważne istnieniu pola spinorowego $\pi_{\bar{C}}$ takiego, że

$$\nabla^A_{\bar{C}}\phi^B = -\epsilon^{AB}\pi_{\bar{C}}.$$

W przestrzeni Minkowskiego $\mathbb{R}^4$ mamy$\nabla^A_{\bar{D}}\nabla^B_{\bar{E}} = \nabla^B_{\bar{E}}\nabla^A_{\bar{D}}$, więc wyrażenie $\nabla^A_{\bar{D}}\nabla^B_{\bar{E}}\phi^C$ jest w pełni antysymetryczne w ABC, zatem znika. Stąd: pole $\pi_{\bar{C}}$ jest stałe. Niech $x^{A\bar{B}} = \sigma_\mu{}^{A\bar{B}}x^\mu$, to równość $\nabla_\mu x^\nu = \delta^\nu_\mu$ jest równoważna $\nabla^A_{\bar{B}}x^{C\bar{D}} = \epsilon^{AC}\delta^{\bar{D}}_{\bar{B}}$, więc równanie twistorowe ma ogólne rozwiązanie

$$\phi^A = \omega^A - x^{A\bar{B}}\pi_{\bar{B}}, \quad \text{gdzie} \quad \omega \in S,\ \pi \in S^*.$$

Każde takie rozwiązanie nazywa się **twistorem**.

Zbiór T wszystkich twistorów w przestrzeni Minkowskiego jest 4-wymiarową zespoloną przestrzenią wektorową. Twistor można utożsamić z wektorem

$$Z = (\omega, \bar{\pi}) \in T = S \oplus \bar{S}^*$$

czyli $$(Z^\alpha) = (Z^1, Z^2, Z^3, Z^4) = (\omega^1, \omega^2, \pi_{\bar{1}}, \pi_{\bar{2}}).$$

Kiedy istnieje $x \in \mathbb{R}^4$ taki, że $\phi(x) = 0$? Jeśli $\phi(x) = 0$ i $\pi = 0$, to $\omega = 0$, więc zakładamy $\pi \neq 0$. Jeśli także $\phi(y) = 0$, to $(y^{A\bar{B}} - x^{A\bar{B}})\pi_{\bar{B}} = 0$, więc istn. $t \in \mathbb{R}$ takie, że

$$y^{A\bar{B}} = x^{A\bar{B}} + t\pi^A\pi^{\bar{B}}$$

Zbiór $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \phi(x) = 0, \phi \in T\}$, jeśli nie jest pusty, tworzy prostą zerową (=**promień**) o wektorze kierunkowym $k^{A\bar{B}} = \pi^A\pi^{\bar{B}}$.

Warunek konieczny: mnożąc $\omega^A - x^{A\bar{B}}\pi_{\bar{B}} = 0$ przez π_A oraz $\omega^{\bar{A}} - x^{B\bar{A}}\pi_B = 0$ przez $\pi_{\bar{A}}$ i odejmując stronami otrzymuje się równanie

$$\omega^A\pi_A - \omega^{\bar{A}}\pi_{\bar{A}} = 0 \tag{2,2}$$

czyli

$$C(Z, Z) \stackrel{\text{def}}{=} Z^1\bar{Z}^3 + Z^2\bar{Z}^4 - \bar{Z}^1Z^3 - \bar{Z}^2Z^4 = 0.$$

Forma (pseudo)hermitowska $C(Z, Z)$ ma sygnaturę $(2, 2)$. Twistor $0 \neq Z \in T$ spełniający $C(Z, Z) = 0$ nazywa się **zerowym**. Warunek $(2, 2)$ jest dostateczny: jeśli on zachodzi i $\omega^A\pi_A \neq 0$, to rozwiązaniem ogólnym $\phi(x) = 0$ jest

$$x^{A\bar{B}} = \frac{\omega^A\omega^{\bar{B}}}{\omega^C\pi_C} + t\pi^A\pi^{\bar{B}}$$

co definiuje promień

$$t \mapsto l + tk, \quad l^{A\bar{B}} = \frac{\omega^A\omega^{\bar{B}}}{\omega^C\pi_C}, \quad k^{A\bar{B}} = \pi^A\pi^{\bar{B}}.$$

Jeśli $\omega^A\pi_A = 0$, to z równania twistorowego wynika $\omega = 0$ i $x^{A\bar{B}} = tk^{A\bar{B}}$ (promień przechodzący przez początek układu).

Podstawowa idea programu twistorowego Penrose'a: zastąpić niefizyczne punkty czasoprzestrzeni przez bardziej fizyczne proste zerowe; wprowadzić struktury holomorficzne do fizyki.

Twistory zerowe $Z = (\omega, \bar{\pi})$ ($\pi \neq 0$) i $\lambda Z = (\lambda\omega, \lambda\bar{\pi})$, $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, przedstawiają ten sam promień; z tego punktu widzenia ważna jest przestrzeń twistorów rzutowych $\mathbb{P}(T) = \mathbb{CP}_3$ oraz jej 5-wymiarowa rzeczywista podprzestrzeń

$$\mathcal{N} = \{\operatorname{dir} Z \in \mathbb{P}(T) \mid C(Z, Z) = 0\}$$

Zachodzi „niemal" wzajemnie jednoznaczne odpowiedniość między elementami $\mathcal{N}$ i promieniami w $\mathbb{R}^4$: każdemu takiemu promieniowi odpowiada jeden element $\mathcal{N}$, ale elementy zbioru

$$\{\operatorname{dir}(\omega, 0) \mid \omega \in S^\times\} = \mathbb{CP}_1 \subset \mathcal{N}$$

nie mają odpowiedników wśród tych promieni; odpowiadają one „stożkowi zerowemu w ∞"; heurystyczny dowód: zastępując $(\omega, \bar{\pi})$ przez $(\lambda\omega, \bar{\pi})$ otrzymujemy promień

$$\lambda \frac{\omega^A \omega^{\bar{B}}}{\omega^C \pi_C} + t\pi^A \pi^{\bar{B}}$$

Mamy $\operatorname{dir}(\lambda\omega, \bar{\pi}) = \operatorname{dir}(\omega, \bar{\pi}/\lambda) \to \operatorname{dir}((\omega, 0))$ dla $\lambda \to \infty$.

To spostrzeżenie doprowadziło do rozpatrywania **uzwarconej przestrzeni Minkowskiego**, którą można skonstruować wychodząc z przestrzeni twistorów T.

Najpierw rozpatrujemy (T, vol), gdzie $0 \neq \mathrm{vol} \in \bigwedge^4 T$; w 6-wymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej $\bigwedge^2 T$ jest określony iloczyn skalarny g taki, że jeśli $X, Y \in \bigwedge^2 T$ to $X \wedge Y = 2g(X, Y)\,\mathrm{vol}$; Pfaffian $\mathrm{Pf}(X) = g(X, X)$ jest niezwyrodniałą formą kwadratową. Odnosząc wszystko do reperu unimodularnego w T, tzn takiego reperu (e_α), $\alpha = 1, 2, 3, 4$, że $\mathrm{vol} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$, mamy

$$\mathrm{Pf}(X) = X^{14}X^{23} + X^{24}X^{31} + X^{34}X^{12} \quad (\text{porównaj z } \mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$$

więc $\mathrm{Pf}(X)^2 = \det X$. Jeśli T jest przestrzenią rzeczywistą, to $\mathrm{Pf}(X)$ jest formą kwadratową o sygnaturze $(3, 3)$. Mimo, że nie ma iloczynu skalarnego w T, element objętości określa odwzorowanie dualizacji (bez podnoszenia wskaźników)

$$\star : \textstyle\bigwedge^2 T \to \bigwedge^2 T^*, \quad \star X_{12} = X^{34}, \ \text{itd.}$$

czyli $\star X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}X^{\gamma\delta}$, co jest dobrze określone, bo vol redukuje grupę do $\mathrm{SL}(T)$. Zachodzi

$$\star X_{\alpha\gamma}X^{\gamma\beta} = -\delta_\alpha^\beta \, \mathrm{Pf}(X)$$

Dowód przez sprawdzenie, $\star X_{12}X^{21} + \star X_{13}X^{31} + \star X_{14}X^{41} = -X^{34}X^{12} - X^{24}X^{31} - X^{23}X^{14} = -\mathrm{Pf}(X)$, itd. Rozpatrując X jako odwzorowanie $X : T^* \to T$ oraz $\star X : T \to T^*$, mamy

$$\star X \circ X = -\mathrm{Pf}(X)\mathrm{id}_{T^*}, \quad X \circ \star X = -\mathrm{Pf}(X)\mathrm{id}_T$$

Odwzorowanie $\gamma : \mathcal{C}\ell(\bigwedge^2 T, \mathrm{Pf}) \to \mathrm{End}(T \oplus T^*)$ będące rozszerzeniem odwzorowania Clifforda $\gamma : \bigwedge^2 T \to \mathrm{End}(T \oplus T^*)$,

$$\gamma(X) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -\star X & 0 \end{pmatrix}$$

jest izomorfizmem algebr i pokazuje, że **twistory** – elementy T i T^* – **są spinorami chiralnymi dla przestrzeni 6-wymiarowej** $(\bigwedge^2 T, \mathrm{Pf})$.

Łatwo znaleźć grupy Spin w 6 wymiarach: z $\mathrm{Pf}(X)^2 = \det X$ otrzymuje się, dla $a \in \mathrm{End}\, T$,

$$\mathrm{Pf}(aXa^*) = \det a\, \mathrm{Pf}(X)$$

a stąd $\mathrm{Spin}(6, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(4, \mathbb{C})$ oraz $\mathrm{Spin}_0(3,3) = \mathrm{SL}(4, \mathbb{R})$.

Aby znaleźć $\mathrm{Spin}(4,2)$ używamy formy $\langle \bar{Z}, C(Z) \rangle$ o sygnaturze $(2,2)$. Odwzorowanie $C : T \to \bar{T}^*$ przedłuża się do odwzorowania $C : \bigwedge^2 T \to \bigwedge^2 \bar{T}^*$; definiujemy przestrzeń rzeczywistą

$$\{X \in \textstyle\bigwedge^2 T \mid C(X) = \star \bar{X}\}$$

We współrzędnych $C(e_\alpha) = C_{\alpha\bar{\beta}} e^{\bar{\beta}}$, $\quad C_{\alpha\bar{\gamma}} C_{\beta\bar{\delta}} X^{\alpha\beta} = \star\overline{X_{\gamma\delta}}$.

Macierz $(C_{\alpha\bar{\gamma}}) = \mathrm{diag}\,(1,1,-1,-1)$ daje

$$\begin{aligned} X^{12} &= \star\overline{X_{12}} = \overline{X^{34}} \\ -X^{13} &= \star\overline{X_{13}} = \overline{X^{42}} \\ -X^{14} &= \star\overline{X_{14}} = \overline{X^{23}} \end{aligned}$$

a stąd

$$\mathrm{Pf}(X) = |X^{12}|^2 - |X^{13}|^2 - |X^{14}|^2$$

$$\mathrm{Spin}_0(4,2) = \mathrm{SU}_0(2,2)$$

Podobnie $(C_{\alpha\bar{\gamma}}) = \mathrm{diag}\,(1,1,1,1)$ daje $\mathrm{Spin}(6) = \mathrm{SU}(4)$.
Pokazuje się, że $\mathrm{Spin}_0(5,1) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{H})$.

Zadanie: Pokazać, że $\mathrm{Spin}(5) = \mathrm{Sp}(2) \overset{\mathrm{def}}{=} \{A \in \mathbb{H}(2) \mid AA^\dagger = I\}$. Wskazówka: skorzystać ze wzoru $\begin{pmatrix} t & q \\ \bar{q} & -t \end{pmatrix}^2 = (t^2 + q\bar{q}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{H}$.

Kwadryki

Kwadryka zespolona (KLEINa)

$$Q(W, \mathrm{Pf}) = \{\mathrm{dir}\, X \in \mathbb{P}(W) \mid \mathrm{Pf}(X) = 0\}, \quad W = \textstyle\bigwedge^2 T$$

jest 4-wymiarową zwartą rozmaitością zespoloną.

Ogólniej, niech (W, g) będzie $(m+2)$-wymiarową przestrzenią wektorową nad K taką, że forma $g(w)$ nie jest dodatnio lub ujemnie określona. Można rozpatrywać W jako $(m+2)$-wymiarową płaską rozmaitość z tensorem metrycznym $g = g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}w^\mu\, \mathrm{d}w^\nu$, gdzie $w = w^\mu e_\mu \in W$, $\mu, \nu = 1, \ldots, m+2$.

Stożek zerowy

$$N(W,g) = \{w \in W^\times \mid g(w) = 0\} \xrightarrow{j} W$$

jest hiperpowierzchnią w W.

Przestrzeń styczna do $N(W,g)$ w punkcie w_0 to

$$T_{w_0}(N(W,g)) = \{w \in W \mid g(w, w_0) = 0\}.$$

więc tensor $j^* g$ jest osobliwy.

Kwadryka

$$Q(W,g) = \{\operatorname{dir} w \in P(W) \mid w \in N(W,g)\}$$

jest zwarta i ma wymiar m. Stożek zerowy jest wiązką liniową nad kwadryką. Jeśli $s : U \to N(W,g)$ jest lokalnym przekrojem tej wiązki, tzn. $U \subset Q(W,g)$ i $q = \operatorname{dir} s(q)$, to tensor $s^* j^* g = g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}s^\mu\, \mathrm{d}s^\nu$ jest nieosobliwy na U. Jeśli $s' : U' \to N(W,g)$ jest innym przekrojem tej wiązki, to dla $q \in U \cap U'$ wektory $s(q)$ i $s'(q)$ są do siebie proporcjonalne, więc istnieje funkcja $f : U \cap U' \to K^\times$ taka, że $s'(q) = f(q)s(q)$. Stąd, na $U \cap U'$

$$g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}s'^\mu\, \mathrm{d}s'^\nu = f^2 g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}s^\mu\, \mathrm{d}s^\nu + 2\, \mathrm{d}f g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}s^\mu s^\nu + (\mathrm{d}f)^2 g_{\mu\nu} s^\mu s^\nu$$

ale $g_{\mu\nu} s^\mu s^\nu = 0 \Rightarrow g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}s^\mu s^\nu = 0$, czyli **kwadryka ma naturalną geometrię konforemną**, ale dla $K = \mathbb{C}$ nie ma zespolonej geometrii metrycznej (ale ma geometrię Hermite'a).

Natomiast jeśli przestrzeń W jest rzeczywista, g ma sygnaturę $(k+1, l+1)$, to $Q(W,g)$ jest dyfeomorficzna $(\mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_l)/\mathbb{Z}_2$; np. z przestrzeni Minkowskiego otrzymuje się, jako kwadrykę, „sferę niebieską" $\mathbb{S}_2$. Jeśli W jest 6-wymiarowa a g ma sygnaturę $(4,2)$, to kwadryka jest uzwarconą przestrzenią Minkowskiego, dyfeomorficzną $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_1$; ale to jest inne uzwarcenie niż to, które występuje w diagramie Penrose'a (przestrzeń zwarta z brzegiem $\mathscr{I}$).

Niech wektory w_0 i w_∞ będą zerowe i $g(w_0, w_\infty) = 1/2$. Przestrzeń wektorowa

$$V = \{w \in W \mid g(w, w_0) = g(w, w_\infty) = 0\} = \operatorname{span}\{w_0, w_\infty\}^\perp$$

jest m-wymiarowa, a ograniczenie h iloczynu skalarnego g do V jest nieosobliwe.

Odwzorowanie

$$i : V \to Q(W,g), \quad i(v) = \operatorname{dir}(w_0 + v - h(v) w_\infty)$$

jest dobrze określone, bo wektor $w_0 + v - h(v)w_\infty$ jest zerowy; $i(V)$ jest gęste w $Q(W,g)$, bo $Q(W,g) \setminus i(V)$ to

$$\{\operatorname{dir}(v + w_\infty) \mid v \in V, h(v) = 0\} \text{ oraz } \{\operatorname{dir}(v) \mid v \in V^\times, h(v) = 0\}$$

czyli „uzwarcony stożek zerowy w ∞".

Dwa przecinające się promienie określają punkt w przestrzeni Minkowskiego; promienie, odpowiadające twistorom zerowym $Z = (\omega, \bar\pi)$ i $Z' = ('\omega, '\bar\pi)$, przecinają się $\Longleftrightarrow$ istnieje rozwiązanie x układu równań

$$\omega^A - x^{A\bar B}\pi_{\bar B} = 0, \quad '\omega^A - x^{A\bar B}\,'\pi_{\bar B} = 0.$$

Mnożąc pierwsze równanie przez $'\pi_A$ i odejmując od niego sprzężenie zespolone drugiego równania pomnożonego przez π_A otrzymuje się

$$C(Z, Z') = 0$$

gdzie $2C(Z, Z') = C(Z + Z', Z + Z') - C(Z, Z) - C(Z', Z')$ („polaryzacja"). Czyli: promienie przecinają się, jeśli odpowiadające im twistory są ortogonalne.

Kongruencje promieni bez ścinania i twierdzenie KERRa

Zagadnienie Robinsona (1959): kiedy w rozmaitości Lorentza $(M, g, \text{orient.})$ istnieje zerowe pole e.m. spełniające równania Maxwella?

Pole zerowe $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0 = E^2 - \mathbf{B}^2)$ ma tensor energii-pędu $T^{\mu\nu} = k^\mu k^\nu$ i jeśli użyć do jego opisu 2-formy zespolonej F, $\star F = \mathrm{i}F$, to zerowość pola jest równoważna $k \lrcorner F = 0$ albo $\kappa \wedge F = 0$, gdzie $\kappa = g(k)$, więc $F = \kappa \wedge \mu$, gdzie μ jest forma zespoloną zerową, $k \lrcorner \mu = 0$.

Pole k rozpina wiązkę liniową K wektorów zerowych, zawartą w wiązce $K^\perp$; wiązka ilorazowa $K^\perp/K$ ma włókna dwuwymiarowe, zaopatrzone w strukturę konforemną określoną przez tensor $\mu \otimes \bar\mu + \bar\mu \otimes \mu$.

Z osłabionych równań Maxwella dla $F = \kappa \wedge \mu$

$$\kappa \wedge \mathrm{d}F = 0, \quad \mu \wedge \mathrm{d}F = 0$$

czyli

$$\kappa \wedge \mu \wedge \mathrm{d}\kappa = 0, \quad \kappa \wedge \mu \wedge \mathrm{d}\mu = 0$$

wyprowadza się warunki konieczne, które przy założeniu analityczności (J. Tafel *On the Robinson theorem and shearfree geodesic null congruences* Lett. Math. Phys. **10** (1985) 33–39; zob. także C. D. Hill, J. Lewandowski, P. Nurowski *Einstein's Equations and The Embedding of 3-dimensional CR Manifolds* Indiana University Mathematics Journal **57** (2008) 3131–3176) są także wystarczające na to, aby z wiązką K można było związać zerowe pole e.m. Mianowicie, warunki konieczne otrzymuje się zwężając dwa ostatnie równania z k, co daje informacje o pochodnej Liego względem k form κ i μ,

$$\kappa \wedge \mathcal{L}(k)\kappa = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{pole } k \text{ jest geodezyjne}$$

$$\mathcal{L}(k)\mu = a\mu + b\kappa$$

więc strumień (*flow*) pola k zachowuje geometrię konforemną $K^\perp/K$ czyli „kongruencja krzywych zerowych generowana przez k jest geodezyjna i bez ścinania" (*sng*=shear-free null geodetic).

W **przestrzeni Minkowskiego** $\mathscr{M}$ jest wiele takich kongruencji; (fale płaskie, fale sferyczne, ale nie fale cylindryczne). Kerr podał sposób znalezienia wszystkich takich analitycznych kongruencji, a Penrose zinterpretował ten wynik w języku twistorów.

Niech $u = t + z, v = t - z, w = x + \mathrm{i}y$ będzie układem współrzędnych w $\mathscr{M}$,

$$(x^{A\bar{B}}) = \begin{pmatrix} u & \bar{w} \\ w & v \end{pmatrix}, \quad \text{więc} \quad \det(\mathrm{d}x^{A\bar{B}}) = \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \mathrm{d}\bar{w}\,\mathrm{d}w = g$$

Macierz unimodularna $\begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ indukuje („zerowe") przekształcenie Lorentza,

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{\mathfrak{z}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u & \mathrm{d}\bar{w} \\ \mathrm{d}w & \mathrm{d}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{z} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \bar{\mu} \\ \mu & \mathrm{d}v \end{pmatrix}$$

zatem $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \mathrm{d}w\,\mathrm{d}\bar{w} = \kappa\,\mathrm{d}v - \mu\bar{\mu}$, gdzie

$$\mu = \mathrm{d}w + \mathfrak{z}\,\mathrm{d}v, \quad \kappa = \mathrm{d}u + \mathfrak{z}\,\mathrm{d}\bar{w} + \bar{\mathfrak{z}}\mu$$

Jeśli $\mathfrak{z} : \mathscr{M} \to \mathbb{C}$, to κ jest „ogólnym" polem zerowych 1-form (wyjątek: kierunek $\mathrm{d}v$ odpowiada $\mathfrak{z} \to \infty$).

Dla tych pól warunki $\kappa \wedge \mu \wedge \mathrm{d}\kappa = 0$, $\kappa \wedge \mu \wedge \mathrm{d}\mu = 0$ sprowadzają się do jednego

$$\boxed{\mathrm{d}\mathfrak{z} \wedge \mathrm{d}(u + \bar{w}\mathfrak{z}) \wedge \mathrm{d}(w + v\mathfrak{z}) = 0} \qquad \text{(box)}$$

Kongruencja promieni w $\mathscr{M}$ to 3-wymiarowa podrozmaitość $\mathcal{R}$ 5-wymiarowej rozmaitości $\mathcal{N} \subset \mathbb{P}(T)$ kierunków twistorów zerowych.

Tw. Kerra–Penrose'a: lokalnie, każda analityczna kongruencja *sng* w $\mathscr{M}$ jest postaci

$$\mathcal{R} = \{\operatorname{dir} Z \in \mathcal{N} \mid H(Z) = 0\}$$

gdzie $H : T \to \mathbb{C}$ jest funkcją holomorficzną (czterech zmiennych zespolonych $Z = (\omega^1, \omega^2, \pi_{\bar{1}}, \pi_{\bar{2}})$), jednorodną, $H(\lambda Z) = \lambda^k H(Z)$ i $\mathrm{d}H \neq 0$.

Twistor $Z = (\omega, \bar{\pi})$ jest zerowy $\Longleftrightarrow$ istnieje $x \in \mathscr{M}$ takie, że $\omega^A = x^{A\bar{B}}\pi_{\bar{B}}$ czyli

$$\omega^1 = u\pi_{\bar{1}} + \bar{w}\pi_{\bar{2}}, \quad \omega^2 = w\pi_{\bar{1}} + v\pi_{\bar{2}}$$

stąd

$$H(u\pi_{\bar{1}} + \bar{w}\pi_{\bar{2}}, w\pi_{\bar{1}} + v\pi_{\bar{2}}, \pi_{\bar{1}}, \pi_{\bar{2}}) = 0$$

Niech $\pi_1 \neq 0$, $\mathfrak{z} = \pi_{\bar{2}}/\pi_{\bar{1}}$. Wobec jednorodności H, ostatnie równanie jest równoważne

$$H(u + \bar{w}\mathfrak{z}, w + v\mathfrak{z}, 1, \mathfrak{z}) = 0$$

skąd można znaleźć $\mathfrak{z}$ jako funkcję współrzędnych. Obliczając $\mathrm{d}H$ otrzymuje się, że formy $\mathrm{d}(u + \bar{w}\mathfrak{z})$, $\mathrm{d}(w + v\mathfrak{z})$ i $\mathrm{d}\mathfrak{z}$ są liniowo zależne, czyli (box).

Przedstawienie całkowe rozwiązań równania cząstek o masie 0

Opierając się na pracy Whittakera (1903), Bateman (1904) podał wzór na ogólne, analityczne i zespolone rozwiązania równania falowego $\Box\phi = 0$. Oparty na spostrzeżeniu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} f(k_\rho x^\rho, l_\sigma x^\sigma) = f_{11} k_\mu k_\nu + 2 f_{12} k_\mu l_\nu + f_{22} l_\mu l_\nu$$

więc jeśli oba wektory k i l są zerowe i ortogonalne do siebie, to

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} f = 0$$

W przestrzeni Minkowskiego, jeśli $k \wedge l \neq 0$, to przynajmniej jeden z tych wektorów musi być zespolony.

Ogólne rozwiązanie równania falowego jest określone przez dwie funkcje trzech zmiennych (Cauchy), stąd przypuszczenie, że takie rozwiązanie jest postaci

$$\int f(\lambda, k_\rho(\lambda) x^\rho, l_\sigma(\lambda) x^\sigma)\, \mathrm{d}\lambda$$

Penrose w istotny sposób uogólnił ten wynik podając metodę znajdowania rozwiązań równania

$$\nabla_{A_1 \bar{B}} \phi^{A_1 \dots A_s} = 0 \tag{FP}$$

opisującego cząstki o masie 0 i spinie $s/2 > 0$ (Fierz & Pauli 1939). Tutaj $\phi^{A_1 \dots A_s} = \phi^{(A_1 \dots A_s)}$ i do takich pól stosuje się (uogólniona) klasyfikacja Cartana-Petrowa-Penrose'a. Liniowa teoria grawitacji odpowiada $s = 4$. Wprowadzając współrzędne $(u, v, w, \bar{w})$ takie, że $g = 2(\mathrm{d}u\, \mathrm{d}v - \mathrm{d}w\, \mathrm{d}\bar{w})$ można wziąć

$$k_\rho(\lambda) x^\rho = u + \lambda \bar{w}, \quad l_\sigma(\lambda) x^\sigma = w + \lambda v$$

wtedy

$$(u + \lambda \bar{w}, w + \lambda v, 1, \lambda) = (Z^1, Z^2, Z^3, Z^4)$$

jest twistorem zerowym i wszystkie dalsze wyniki mają naturalną interpretację twistorową.

Niech μ_A będzie spinorem o składowych $\mu_1 = 1$ i $\mu_2 = \lambda$, więc $\mu^1 = -\lambda$ i $\mu^2 = 1$, to pole

$$\phi^{A_1 \dots A_s} = \oint_C f(u + \lambda \bar{w}, w + \lambda v, \lambda) \mu^{A_1} \dots \mu^{A_s}\, \mathrm{d}\lambda$$

spełnia równanie (FP); istotnie, wobec

$$(\nabla_{A\bar{B}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \\ \frac{\partial}{\partial w} & \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}$$

jest

$$(\nabla_{A\bar{B}}f) = \begin{pmatrix} f_1 & \lambda f_1 \\ f_2 & \lambda f_2 \end{pmatrix}$$

stąd

$$(\mu^A \nabla_{A\bar{B}}f) = \begin{pmatrix} f_1 & \lambda f_1 \\ f_2 & \lambda f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Otrzymane pole jest sumą (całką) pól „typu N” w sensie klasyfikacji C-P-P. Penrose pokazuje, że również same pola algebraicznie zwyrodniałe można tak otrzymać, przez wybór funkcji f. Niech kontur całkowania C obejmuje jeden pojedynczy biegun f w punkcie $\lambda_0(u, v, w, \bar{w})$, tzn.

$$f = \frac{a(u, v, w, \bar{w})}{\lambda - \lambda_0} + \text{funkcja holomorficzna wewnątrz } C$$

to dla dowolnego wielomianu $W(\lambda)$ zachodzi

$$\oint_C W(\lambda) f(u + \lambda\bar{w}, w + \lambda v, \lambda)\, \mathrm{d}\lambda = 2\pi \mathrm{i} W(\lambda_0) a$$

Wobec $\mu = e_1 - \lambda e_2$, iloczyn spinorów $\mu^{A_1} \dots \mu^{A_s}$ po rozłożeniu na iloczyny spinorów e_1 i e_2 będzie miał jako współczynniki wielomiany zmiennej λ. Oznaczając $\mu_0 = e_1 - \lambda_0 e_2$ otrzymujemy dla takiej funkcji f pole postaci

$$\phi^{A_1 \dots A_s} = 2\pi \mathrm{i} a \mu_0^{A_1} \dots \mu_0^{A_s}$$

czyli pole „typu N”. Penrose (1969) pokazuje, że wybierając f z biegunem wyższego rzędu $\leqslant s$, otrzymuje się pole o mniejszej degeneracji.

Widać, że nie ma jednoznacznej odpowiedniości między funkcjami f i polami ϕ: dodając do f funkcję holomorficzną wewnątrz C, nie zmienia się ϕ. Używając teorii kohomologii odpowiednich snopów nad przestrzenią twistorów, matematycy pokazali, że każde analityczne pole ϕ można w ten sposób otrzymać, zob.

R. S. Ward & R. O. Wells Jr *Twistor Geometry and Field Theory*, Cambridge 1990.

PROBLEMA ALGEBRAICUM OB AFFECTIONES PRORSUS SINGULARES MEMORABILE

Commentatio 407 indicis ENESTROEMIANI
Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **15** (1770), 1771, p. 75—106
Summarium ibidem p. 13—15

SUMMARIUM

Problema, quod in hac dissertatione resolvitur, cum quadratis magicis multum habet affinitatis, sed ob affectiones prorsus singulares longe magis est memorabile. Inveniendae nimirum sunt novem quantitates A, B, C, D etc., quae sint eius indolis, ut in quadratum hoc modo dispositae

$$\begin{array}{ccc} A, & B, & C, \\ D, & E, & F, \\ G, & H, & I \end{array}$$

duodecim his conditionibus satisfaciant

$$\begin{array}{ll} 1.\ A^2 + D^2 + G^2 = 1, & 4.\ AB + DE + GH = 0, \\ 2.\ B^2 + E^2 + H^2 = 1, & 5.\ AC + DF + GI = 0, \\ 3.\ C^2 + F^2 + I^2 = 1, & 6.\ BC + EF + HI = 0, \\ 7.\ A^2 + B^2 + C^2 = 1, & 10.\ AD + BE + CF = 0, \\ 8.\ D^3 + E^2 + F^2 = 1, & 11.\ AG + BH + CI = 0, \\ 9.\ G^2 + H^2 + I^2 = 1, & 12.\ DG + EH + FI = 0. \end{array}$$

Prima observatio, quam Ill. Auctor de hoc problemate affert, in eo consistit, ut id ad classem problematum indeterminatorum referat; id quod eo magis paradoxum videri omnino debet, cum numerus conditionum adimplendarum superet numerum quantitatum incognitarum, unde problema potius pro plus quam determinato habendum foret; verum natura

PROBLEMATIS INITIO PROPOSITI SOLUTIO GENERALIS IN NUMERIS RATIONALIBUS

33. Coronidis loco solutionem problematis nostri e methodo DIOPHANTEA petitam subiungam, quae sequenti modo satis concinne exhiberi potest.

Sumantur pro lubitu quatuor numeri p, q, r, s ac posita quadratorum eorum summa

$$pp + qq + rr + ss = u$$

novem numeri quaesiti ita determinati reperiuntur[1])

$$A = \frac{pp+qq-rr-ss}{u}, \quad B = \frac{2qr+2ps}{u}, \quad C = \frac{2qs-2pr}{u},$$

$$D = \frac{2qr-2ps}{u}, \quad E = \frac{pp-qq+rr-ss}{u}, \quad F = \frac{2pq+2rs}{u},$$

$$G = \frac{2qs+2pr}{u}, \quad H = \frac{2rs-2pq}{u}, \quad I = \frac{pp-qq-rr+ss}{u}.$$

1) Solutiones sequentes ex formulis § 34 exhibitis oriuntur ponendo $a = p$, $b = q$, $c = -r$, $d = -s$ et per $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = u$ dividendo. Falso igitur A. CAYLEY (*Sur quelques propriétés des déterminants gauches,* Journal für r. u. a. Mathematik 32, 1846, p. 119, praesertim p. 121; vide etiam eiusdem *Collected mathematical papers,* vol. 1, Cambridge 1889, p. 332) asseruit O. RODRIGUES primum has formas invenisse (*Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide,* Journal de mathématiques 5_1, 1840, p. 380, praesertim p. 405). Debemus quidem illi methodum directam expressiones EULERIANAS obtinendi. Sed etiam hic viam ingressus est, quam EULERUS straverat in commentatione 478 (indicis ENESTROEMIANI): *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum,* Novi comment. acad. sc. Petrop. 20 (1775), 1776, p. 189; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series II, vol. 6. P. St.

Annals of Mathematics
Vol. 69, No. 1, January, 1959
Printed in Japan

CORRESPONDENCE

We have received the following letter, purporting to come fro
ultramundane correspondent:

Sir,

It is sometimes a matter of wonder, to us in Hades, that what
believed to be our best work remains buried under thick layers
in your libraries, while the very talented young men in the ma
ical world of the present day strive manfully against problems w
by no means as novel as they think.

For instance, it is not so long ago that the very remarkable a
systems discovered by my friend Professor Clifford shortly befor
your world have again attracted the attention of your algebrai
many years of oblivion. When, during my lifetime, I first becam
ested in them, I, too, fancied that they were new; I soon found
mistake, and hastened to acknowledge Professor Clifford's p
covery. It is now a matter of great satisfaction to me to hear
name has been given to them, as a fitting tribute to his memor
the living.

On the other hand, as Professor Clifford has told me himself
not occurred to him to apply these algebraic systems to the stud
substitutions which transform a sum of squares into a sum of
(or, as my young friend and colleague Hermann Weyl would say
orthogonal group); he kindly insists that this idea was wholly m
you may well believe, we have often discussed this topic since I
honour of joining the distinguished company of the mathemat