Zadania domowe do wykładu prof. J. Krupskiego
Matematyka IL, 2005/2006

Macierze i układy równań liniowych

Zadanie 1. Wykonaj wszystkie możliwe mnożenia dwóch macierzy wybranych spośród A, B, C, gdzie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2. Zbadaj dla jakich parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ macierze

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

są przemienne.

Odp. $(a = b = 0) \ \vee \ (a = -b \ \wedge \ c = 1)$.

Zadanie 3. Oblicz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$. **Odp.** $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.

Zadanie 4. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} a-b & r-s & m-n \\ b-c & s-t & n-p \\ c-a & t-r & p-m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

Odp. $0,\ 0,\ -(ayz + bxz + cxy),\ 1,\ -98$.

Zadanie 5. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad a, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Oblicz A^{-1} i B^{-1}. Dla jakich parametrów a i α jest to możliwe?

Odp. $A^{-1} = \frac{1}{2a+6}\begin{pmatrix} 6 & -a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{\cos 2\alpha}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,
gdy $a \neq -3$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 6. Znajdź macierze odwrotne do następujących:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 7. Sprawdź czy dany układ równań jest sprzeczny. Jeśli nie jest sprzeczny, rozwiąż go korzystając ze wzorów Cramera.

$$\text{a)} \begin{cases} 2x - y + z &= 1 \\ 3x + y - 2z &= 0 \\ x - 3y - z &= 2 \end{cases}, \qquad \text{b)} \begin{cases} 2x - y - 2z + t &= -1 \\ -x - 2y + 2z + 2t &= -8 \\ y + 3z + 2t &= 0 \\ x - 3y + 3t &= 1 \end{cases}$$

Odp. a) $x = \frac{1}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$, $z = 0$, b) układ sprzeczny.

Zadanie 8. Rozwiąż układ równań z parametrem $a \in \mathbb{C}$ i przedyskutuj liczbę rozwiązań. Co zmieni się w odpowiedzi jeśli ograniczymy się do $a \in \mathbb{R}$?

a) $$\begin{bmatrix} a & -1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} a+1 & 1-a \\ 2a^2 + 4a + 6 & 3(1-a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(a-1) \\ 10(1-a) \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 3a-1 & 2a & 3a+1 \\ 2a & 2a & 3a+1 \\ a+1 & a+1 & 2a+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

d) $$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Odp.

a) Gdy $a \notin \{1, i, -i\}$ mamy jedno rozwiązanie $x = \frac{1}{a^2+1}$, $y = z = \frac{a-1}{2(a^2+1)}$.
Gdy $a \in \{i, -i\}$ układ jest sprzeczny.
Gdy $a = 1$ mamy nieskończenie wiele rozwiązań: $y = 0$, $x = \frac{1}{2} - z$.

b) Gdy $a \notin \left\{1, \frac{-1+i\sqrt{23}}{4}, \frac{-1-i\sqrt{23}}{4}\right\}$: $x = 28\frac{1-a}{2a^2+a+3}$, $y = -2\frac{6a^2+17a+23}{2a^2+a+3}$.
Gdy $a \in \left\{\frac{-1+i\sqrt{23}}{4}, \frac{-1-i\sqrt{23}}{4}\right\}$ układ jest sprzeczny.
Gdy $a = 1$ mamy nieskończenie wiele rozwiązań: $x = 0$, y dowolne.

c) Gdy $a \neq \pm 1$ mamy jedno rozwiązanie $x = -1$, $y = -\frac{3a^2+a-1}{a+1}$, $z = \frac{a(2a+1)}{a+1}$.
Gdy $a = -1$ układ jest sprzeczny.
Gdy $a = 1$ mamy nieskończenie wiele rozwiązań: $z = \frac{1-2x-2y}{4}$.

d) Gdy $a \notin \{-3, 1\}$ mamy jedno rozwiązanie $x = y = z = t = \frac{1}{a+3}$.
Gdy $a = -3$ układ jest sprzeczny.
Gdy $a = 1$ mamy nieskończenie wiele rozwiązań: $t = 1 - x - y - z$.