

## MATEMATYKA II

### Granice funkcji - zadania treningowe przed II kolokwium

1. Obliczyć, zarówno korzystając jak i nie korzystając z twierdzenia de l'Hospitala, granice następujących funkcji:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{2x}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 4x + 3}$$

2. Obliczyć, zarówno korzystając jak i nie korzystając z twierdzenia de l'Hospitala, granice następujących funkcji:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^2+x}}{x-1}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

3. Obliczyć granice następujących funkcji dwoma metodami tj. korzystając z twierdzenia de l'Hospitala oraz wykorzystując granicę  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin(x)}{4x}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 - \cos x}}{\sin^2 x}$$

4. Obliczyć granice następujących funkcji dwoma metodami tj. korzystając z twierdzenia de l'Hospitala oraz wykorzystując granicę  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x-1} \right)^x, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+5}{x^2-3} \right)^{3x^2-5}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$$

5. Z badać ciągłość funkcji:

$$\text{a) } y = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } y = \frac{x}{\sqrt{\sin|x|}}, \quad \text{c) } y = \frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}.$$

6. Obliczyć granice następujących wyrażeń nieoznaczonych:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^{2/x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right) \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right).$$

7. Obliczyć granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3}{x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x [\ln x - \ln(x+2)], \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x-3} \right)^{x/4}, \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \right)^x, \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{4}{x^2} \right)^x.$$

8. Obliczyć granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\tan \frac{1}{x}}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{3}{x}}{\tan \frac{1}{x}}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \cos \frac{1}{x} \right), \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \left( \sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1} \right).$$

9. Obliczyć granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{\arcsin(1 - 3x)} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}.$$