MATEMATYKA IL

Granice ciągów i szeregi - zadania treningowe przed I kolokwium

1. Obliczyć n-tą sumę cząstkową i zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\textbf{a)}\ \sum_{1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right); \quad \textbf{b)}\ 1+\sum_{2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right); \quad \textbf{c)}\ \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$$

2. Wykorzystując interpretację geometryczną ciągu $n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ pokazać, że $\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=\pi$. Na podstawie tego wyniku wywnioskować ile wynosi granica $\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ dla dowolnego x.
Wskazówka: Rozważyć wielokąt foremny o n-bokach wpisany w okrąg o promieniu jednostkowym.

3. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\textbf{a)}\ \frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\cdots; \quad \textbf{b)}\ 1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots; \quad \textbf{c)}\ \frac{1}{2}+\frac{3!}{2\cdot 4}+\frac{5!}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{7!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$$

4. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\textbf{a)}\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots; \quad \textbf{b)}\ \frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\cdots; \quad \textbf{c)}\ \frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\cdots;$$

5. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

$$\textbf{a)}\ 1+\frac{1}{101}+\frac{1}{201}+\frac{1}{301}+\cdots, \quad \textbf{b)}\ 1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\cdots, \quad \textbf{c)}\ \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots,$$

$$\textbf{d)}\ \frac{2}{1}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\cdots, \quad \textbf{e)}\ 1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\cdots, \quad \textbf{f)}\ 1-\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{3a^4}-\frac{1}{4a^6}+\cdots.$$

6. Dla dowolnego $x\in\mathbf{R}$ obliczyć granice ciągów:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+nx^2}, \quad \textbf{b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

7. Dla dowolnego ε dobrać takie $\mathcal{N}$, aby dla każdego $n\geq\mathcal{N}$ było $|a_n-\lim_{n\to\infty}a_n|<\varepsilon$ gdzie:

$$\textbf{a)}\ a_n=\frac{4n^2+5}{n^3-1}; \quad \textbf{b)}\ a_n=\frac{(-1)^n}{n^2}; \quad \textbf{c)}\ a_n=\sqrt{\frac{2n^2+3}{n^2-1}}$$

8. Obliczyć granice ciągów:

$$\textbf{a)}\ n\left(\sqrt[3]{n^3+2n}-n\right), \quad \textbf{b)}\ \sqrt[n]{7n^5+4n^4+3}, \quad \textbf{c)}\ \sqrt{3n^4+4}-\sqrt{3n^4-6n^2+1}$$

$$\textbf{d)}\ \sqrt[n]{2n^7+3n^n}, \quad \textbf{e)}\ \sqrt[3]{n^3+2n+1}-\sqrt{n^2+7n+3}.$$

9. Obliczyć granice ciągów (dla dowolnych $p,q\in\mathbf{N}$):

$$\textbf{a)}\ \frac{2n^2+6n+3}{5n^3+6n+3}, \quad \textbf{b)}\ \frac{2n^2+5\sin n}{-3n^2+4n+2}, \quad \textbf{c)}\ \frac{-4n^3+2n+1}{2n^2+3n+5}, \quad \textbf{d)}\ \frac{(n+6)^q}{2(n^2-7)^p}.$$

10. Obliczyć granice ciągów (dla dowolnych a,b,$q\in\mathbf{R}$):

$$\mathbf{a)}\ \frac{\ln n^3}{n}, \quad \mathbf{b)}\ \frac{\sum_{i=1}^{n} q^i}{n}, \quad \mathbf{c)}\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(a+ib/n)}{n}, \quad \mathbf{d)}\ 2n\left[\ln n - \ln(n+2)\right],$$

$$\mathbf{e)}\ \left(\frac{n}{n-3}\right)^{n/4}, \quad \mathbf{f)}\ \left(1-\frac{4}{n^2}\right)^{n}, \quad \mathbf{g)}\ \frac{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{i+1}\right)}{n}.$$

11. Obliczyć granice ciągów:

$$\mathbf{a)}\ \frac{\sin\frac{2}{n}}{\tan\frac{1}{n}}, \quad \mathbf{b)}\ \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right), \quad \mathbf{c)}\ \sqrt[2]{7}\sqrt[4]{7}\sqrt[8]{7}\ldots\sqrt[2^n]{7}.$$

12. Znaleźć przedział zbieżności następujących szeregów funkcyjnych:

$$\mathbf{a)}\ 1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+\cdots, \quad \mathbf{b)}\ (x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}\frac{(x+1)^4}{4\cdot 4^3}+\cdots,$$

$$\mathbf{c)}\ \frac{2x-3}{1}-\frac{(2x-3)^2}{3}+\frac{(2x-3)^3}{5}-\cdots, \quad \mathbf{d)}\ 1-\frac{x^2}{3\cdot 2\cdot\sqrt{2}}+\frac{x^4}{3^2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}-\frac{x^6}{3\cdot 4\cdot\sqrt{4}}+\cdots.$$

13. Dla jakich wartości zmiennej x następujące szeregi funkcyjne są zbieżne:

$$\mathbf{a)}\ x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots, \quad \mathbf{b)}\ \frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}+\frac{1}{x^2+9}-\frac{1}{x^2+16}+\cdots.$$