

Zadania treningowe z Matematyki 1L - logika i indukcja

1. Załóżmy, że wiemy, iż twierdzenie „Jeśli niebo w noc letnią jest jasne od gwiazd, to noc jest chłodna.” jest prawdziwe.
Czy wynika z tego prawdziwość zdania:
 - (a) W lecie, jeśli noc jest ciepła, to niebo jest bez gwiazd.
 - (b) W lecie, niebo jest zachmurzone lub noc jest chłodna.
 - (c) Nieprawda, że noc w lecie jest jasna od gwiazd i ciepła jednocześnie.
 - (d) Nieprawda, że letnia noc jest chłodna i ciemna.
2. Prawdziwe jest zdanie: „Nieprawda, że jeżeli Platon założył Akademię, to jeśli Arystoteles był uczniem Platona, to Arystoteles nie uczęszczał do Akademii”. Czy informacja ta wystarcza, by udzielić odpowiedzi na każde z podanych niżej pytań? Jeśli tak, to jakie są te odpowiedzi?
 - (a) Czy Platon był założycielem Akademii?
 - (b) Czy Arystoteles był uczniem Platona?
 - (c) Czy Arystoteles uczęszczał do Akademii?
3. Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami:
 - (a) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
 - (b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow q]$.
 - (c) $[(p \vee q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
4. (R. Smullyan) Zadanie to dzieje się na wyspie, której mieszkańcy w pewne dni tygodnia mówią tylko prawdę, a w pozostałe dni tygodnia - kłamią.
 - (a) Stefan kłamie tylko w poniedziałki, a w pozostałe dni mówi prawdę. Pewnego dnia Stefan powiedział: „Dziś jest poniedziałek, a ja jestem żonaty”. Czy był wtedy poniedziałek? Czy Stefan jest żonaty?
 - (b) Według innej wersji tej historii, Stefan nie powiedział: „Dziś jest poniedziałek, a ja jestem żonaty” ale „Dziś jest poniedziałek lub ja jestem żonaty” Jeśli ta wersja jest prawdziwa, to czy Stefan jest żonaty i czy był wtedy poniedziałek?
 - (c) Istnieje jeszcze jedna wersja tej historii, nieco podobna do pierwszej, ale różniąca się w pewnym subtelnym szczególe. Według niej Stefan najpierw powiedział: "Dziś jest poniedziałek", a nieco później tego samego dnia powiedział: "Jestem żonaty". Czy powinniśmy wierzyć tej wersji?

- (d) Stefan ma brata o imieniu Marceli, który kłamie tylko w czwartki. Pewnego dnia jeden z braci (nie wiadomo niestety który) powiedział: "Jutro będzie wtorek". Dokładnie tydzień później ten sam brat powiedział: "Jutro będę kłamał". Którego dnia tygodnia to się wydarzyło?
- (e) Zgodnie z inną wersją tydzień po tym jak jeden z braci powiedział: "Jutro będzie wtorek", drugi brat stwierdził "Jutro będę kłamał". Jeśli ta wersja jest prawdziwa, to którego dnia tygodnia się to zdarzyło?
5. Udowodnić za pomocą metody indukcji matematycznej, że
- (a) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \dots + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$
- (b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$
- (c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$
- (d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$
- (e) $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$
- (f) $\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$
- (g) $\sum_{k=1}^n (4k-3) = n(2n-1)$
6. Udowodnić za pomocą metody indukcji matematycznej, że dla n naturalnych:
- (a) $2^n > n$
- (b) $(n+1)^n < n^{n+1}$
7. Znaleźć błąd w dowodzie indukcyjnym twierdzenia: „Wszystkie koty są czarne”: Najpierw weźmy jednego czarnego kota (zawsze się da takiego znaleźć). Teraz dowiedzimy kroku indukcyjnego. Załóżmy, że twierdzenie jest spełnione dla dowolnego zbioru n kotów. Dowiedzimy, że w takim razie musi ono zachodzić również dla zbioru $n+1$ kotów. Weźmy zatem zbiór $n+1$ kotów. Ponieważ dowolny podzbiór n kotów wybrany z naszego zbioru składa się wyłącznie z kotów czarnych (z założenia indukcyjnego), a każdy z $n+1$ kotów należy do przynajmniej jednego n elementowego podzbioru, więc każdy z $n+1$ kotów jest czarny.