

TEMATY EGZAMINACYJNE Z MATEMATYKI I L

2005/6

1. ELEMENTY LOGIKI

Działania na zdaniach: Negacja, alternatywa, alternatywa wykluczająca, koniunkcja, implikacja (np. różnica między implikacją a potocznie rozumianym wynikaniem), tożsamość. Pojęcie tautologii (ważne tautologie: prawo podwójnego przeczenia, prawa de Morgana, prawo transpozycji). Funkcje zdaniowe. Kwantyfikatory. Indukcja matematyczna. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

2. ZBIORY

Różne sposoby określania zbiorów. Suma, iloczyn i różnica zbiorów. Pojęcia inkluzji i dopełnienia. Prawa de Morgana. Iloczyn kartezjański zbiorów. Relacja.

Przestrzeń metryczna. Otoczenie i sąsiedztwo. Klasyfikacja punktów zbioru (punkty wewnętrzne, skupienia i izolowane). Zbiory otwarte, domknięte i ograniczone. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

3. FUNKCJE

Dwie (równoważne) definicje funkcji. Dziedzina, przeciwdziedzina, obraz, przeciwobraz. Identyfikacja dwóch odwzorowań. Surjekcja, injekcja, bijekcja. Problem odwracania odwzorowań. Superpozycja. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia (w szczególności funkcje \arcsin i \arccos oraz permutacje).

4. FUNKCJE CIĄGŁE

Definicje granicy funkcji (ciągowa i otoczeniowa). Reguła de l'Hospitala. Dwie (równoważne) definicje ciągłości funkcji (Heinego i Cauchy'ego). Tw. o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Tw. o ciągłości superpozycji funkcji. Twierdzenia (1) o ciągłości funkcji odwrotnej i (2) Weierstrassa (oba bez dowodów). Tw. o własności Darboux funkcji ciągłych. Tw. o przechodzeniu funkcji ciągłej przez wartości pośrednie. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

5. CIĄGI

Ciąg. Rodzaje ciągów (rosnący, niemalejący, malejący, nierosnący, monotoniczny, ściśle monotoniczny, ograniczony). Granica ciągu. Ciąg zbieżny (tw. Cauchy'ego). Tw. o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów. Tw. o zachowaniu nierówności. Tw. o trzech ciągach. Tw. o zbieżności ciągu monotonicznego (bez dowodu). Liczba e (jako granica ciągu, jako suma szeregu i jako przykład liczby niewymiernej). Ciągi rozbieżne do $\pm\infty$. Tw. Stolza (bez dowodu). Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

6. SZEREGI

Nieskończony szereg liczbowy. Zbieżność szeregu. Warunek konieczny zbieżności szeregu. Szeregi o wyrazach dodatnich. Kryterium porównawcze zbieżności szeregów. Kryteria d'Alemberta zbieżności i rozbieżności szeregów. Kryterium Cauchy'ego. Szeregi o dowolnych wyrazach rzeczywistych. Bezwzględna zbieżność szeregów. Kryterium Leibniza zbieżności szeregu przemienne. Szeregi funkcyjne. Szeregi potęgowe. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

7. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Pochodna funkcji. Geometryczna interpretacja pochodnej. Tw. o ciągłości funkcji różniczkowalnej. Tw. o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Tw. o pochodnej superpozycji funkcji. Tw. o pochodnej funkcji odwrotnej. Styczne i normalne do krzywej płaskiej. Twierdzenia o wartości średniej: Rolle'a i Lagrange'a. Wnioski z tw. Lagrange'a (jeżeli $df/dx=0$... i jeżeli $df/dx>0$). Pochodne wyższych rzędów. Wzór Taylora. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

8. BADANIE PRZEBIEGU FUNKCJI

Ekstremum. Tw. o warunku dostatecznym istnienia ekstremum. Tw. o znikaniu df/dx w punkcie ekstremum. Punkt przegięcia. Tw. o ekstremach i punktach przegięcia funkcji dostatecznie wiele razy różniczkowalnej. Wypukłość i wklęsłość. Asymptoty. Podsumowanie: badanie przebiegu zmienności funkcji. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

9. GRUPY I CIAŁA

Grupy i ich najprostsze własności (w grupie jest tylko jeden element neutralny, tylko jeden odwrotny do danego, pojęcie podgrupy, grupa abelowa). Ciało i podciało. Ciało liczb zespolonych. Fundamentalne twierdzenie algebry (bez dowodu). Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

10. LICZBY ZESPOLONE

Dodawanie, mnożenie (w szczególności dzielenie) i sprzężanie liczb zespolonych. Moduł i argument liczby zespolonej. Nierówność trójkąta. Interpretacja geometryczna liczb zespolonych (płaszczyzna Gaussa). Postać trygonometryczna liczby zespolonej. Potęgowanie (wzory de Moivre'a) i pierwiastkowanie liczb zespolonych. Funkcje \sin , \cos oraz \exp jako przykłady funkcji zmiennej zespolonej (w szczególności wykazanie, że $\exp(z_1)\exp(z_2)=\exp(z_1+z_2)$). Wzór Eulera. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

11. MACIERZE

Macierze. Rodzaje macierzy: Prostokątne, kwadratowe, zerowe, jednostkowe, diagonalne, symetryczne, antysymetryczne, hermitowskie. Jednoargumentowe działania na macierzach: Transpozycja, sprzężenia w sensie zespolonym i hermitowskim, ślad. Dwuargumentowe działania na macierzach: Mnożenie przez liczbę, dodawanie, mnożenie, komutator. Obroty w \mathbf{R}^2 . Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

12. WYZNACZNIKI

Definicja wyznacznika (w szczególności uwagi nt. permutacji). Reguła Sarrusa. Własności wyznaczników (w tym tw. Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy). Rozwinięcie Laplace'a dla wyznacznika. Odwracanie macierzy. Grupa (ze względu na mnożenie) macierzy nieosobliwych. Minor. Rząd macierzy i jego elementarne własności. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

13. RÓWNANIA LINIOWE

Układ równań liniowych (także zapis macierzowy). Wzory Cramera (w szczególności jednoznaczność rozwiązań układu cramerowskiego). Kombinacja liniowa równań. Liniowa niezależność równań. Układy równoważne. Liczba rozwiązań. Tw. Kroneckera i Capelliego. Jednorodny układ równań. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia i twierdzenia.

14. \mathbf{R}^3

Punkty, wektory związane i wektory swobodne. Odległości między punktami, długości wektorów. Działania na wektorach: Mnożenie przez liczbę i dodawanie wektorów. Iloczyn skalarny. \mathbf{R}^3 jako przestrzeń wektorowa. Kombinacja liniowa wektorów. Baza $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. \mathbf{R}^3 jako przestrzeń euklidesowa. Iloczyn wektorowy. Iloczyn mieszany. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

15. PŁASZCZYZNA

Równania ogólne płaszczyzny (interpretacja). Równania parametryczne płaszczyzny. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty. Interpretacja geometryczna układów równań liniowych. Odległość punktu od płaszczyzny. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

16. PROSTA

Równania ogólne prostej (interpretacja). Równania parametryczne prostej. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty. Odległość punktu od prostej. Przykłady ilustrujące powyższe pojęcia.

24 stycznia 2006 r.