Warszawa, 09.03.2012

Ramowy program ćwiczeń z elektrodynamiki klasycznej

Ćwiczenia I–II
uzupełnienia matematyczne

1. Elementy rachunku wektorowego: iloczyn skalarny i wektorowy; tożsamości rachunku wektorowego. W szczególności, pokazać że:
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}. \tag{1}$$

2. Różniczkowanie pól skalarnych i wektorowych: gradient, dywergencja, rotacja w krzywoliniowych układach ortogonalnych. Twierdzenia Gaussa (z dowodem) i Stokesa (bez dowodu). Tożsamości. W szczególności:

   - Wykorzystując rów. (1) zapostulować wzór na $\vec{\nabla} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ i go udowodnić.
   - Policzyć:
   $$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) \tag{2}$$
   gdzie $\vec{d}$ jest stałym wektorem (powiązać z polem dipola punktowego, które wyprowadzicie przy okazji dyskusji zasady superpozycji)
   - Jeżeli zajdzie potrzeba to udowodnić jedną z tożsamości z okładki w podręczniku Griffithsa lub jedną z ich odmian np.
   $$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\,\vec{a}\times\vec{b}) = \varphi\left(\vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})\right) + (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\nabla}\varphi \tag{3}$$

3. Pola bezwirowe i bezźródłowe, i ich własności (Griffiths, str. 74-75). Podać przykłady takich pól i naszkicować je. Podkreślić związek z elektrodynamiką, z charakterem pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$.

4. Obliczyć dywergencję pola wektorowego $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ i laplasjan pola skalarnego $\frac{1}{|\vec{r}|}$ (powiązać z polem kulombowskim ładunku punktowego). Uogólnienić wzory na przypadek: $\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ (przenieść różniczkowanie z $\vec{\nabla}$ na $\vec{\nabla}'$). Wykorzystując wyprowadzone wzory obliczyć rozkład ładunku wytwarzający pole:
$$\vec{E} = Ae^{-ar}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{4}$$
wyizolowując osobliwość tj. przedstawiając powyższy wzór w postaci:
$$\vec{E} = A\left(\frac{e^{-ar}}{|\vec{r}|^3} - \frac{1}{|\vec{r}|^3}\right)\vec{r} + A\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \tag{5}$$
Zinterpretować otrzymany wynik.

5. Obliczanie całek konturowych, powierzchniowych i objętościowych metodą wprost i z wykorzystaniem twierdzeń Stokesa i Gaussa. W szczególności:

   - Korzystając z tw. Stokesa obliczyć całkę po konturze $\vec{C}$:
   $$\int_{\vec{C}} y\,dx + z\,dy + x\,dz \tag{6}$$
   gdzie $\vec{C}$ jest okręgiem $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara jeśli patrzymy ze strony dodatnich wartości x.

- Obliczyć całkę powierzchniową:

$$\int_{\vec{S}} x^3\, dy\, dz + y^3\, dx\, dz + z^3\, dx\, dy \tag{7}$$

  gdzie $\vec{S}$ jest zewnętrzną powierzchnią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, wykonując zarówno całkę powierzchniową jak i korzystając z tw. Gaussa.

6. Funkcja (dystrybucja) $\delta-$Diraca. Definicja całkowa $\delta-$Diraca; reprezentacje całkowa i różniczkowa; podstawowe własności; $\delta-$Diraca w układach sferycznym i walcowym. Zastosowanie do obliczania objętościowego rozkładu ładunku na powierzchniach - Jackson zad. 1.3 str. 68.

Ćwiczenia III-IV
elementarne zagadnienia elektrostatyki

1. **Warunki brzegowe Dirichleta:** Pokazać, że rozwiązanie równania Laplace'a $\Delta\varphi = 0$ w dowolnym punkcie $\vec{r}_o$, $\varphi(\vec{r}_o)$, jest równe średniej wartości potencjału φ na sferze $S_R(\vec{r}_o)$ o środku $\vec{r}_o$ i dowolnym promieniu R:

$$\varphi(\vec{r}_o) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R(\vec{r}_o)} \varphi(\vec{r}\,')\, \mathrm{d}a' \tag{8}$$

   Rachunek wykonać dla ładunku punktowego (Griffiths str. 138-139) i uogólnić korzystając z zasady superpozycji. Powiązać z warunkami Dirichleta i jednoznacznością rozwiazań równania Poissona z warunkami Dirichleta na brzegu.

2. **Prawo Gaussa i zasada superpozycji dla ciągłego rozkładu ładunków**: Omówić ogólnie prawo Gaussa w kontekście symetrii układu (rozkładu ładunku); omówić różnice między izolatorami i przewodnikami (metalami); Rozwiązać zadanie BT78 wykorzystując zasadę superpozycji i prawo Gaussa (notatki).

3. **Zasada superpozycji - przypadek dyskretny**: Znaleźć potencjał i pole elektryczne wytwarzane przez dipol elektryczny. Przejść do granicy dipola punktowego.

4. **Prawo Coulomba**: Znaleźć (zad. BT74; notatki) potencjał φ i natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ odcinka o długości $2a$ równomiernie naładowanego ładunkiem q. Znaleźć kształt powierzchni ekwipotencjalnych. Naszkicować linie pola elektrycznego.

5. **Prawo Coulomba**: Wyznaczyć potencjał φ i pole elektryczne $\vec{E}$ wytworzone przez nieprzewodzącą sferę o promieniu R naładowaną ładunkiem powierzchniowym $\sigma = \sigma_o \cos\theta$ (notatki). Powiązać z polem dipola z problemu 2. Obliczyć energię układu wykonując zarówno całkę powierzchniową z $\sigma\varphi$ jak i całkę objętościową z $\vec{E}^2$.

6. **Pojemność i kondensatory**: Dwa długie równoległe przewodniki walcowe o promieniach a_1 i a_2 oddalone są na odległość d dużą w porównaniu z ich promieniami. Znaleźć, w przybliżeniu, pojemność układu na jednostkę długości. Jakiego drutu trzeba użyć (podać średnicę) do utworzenia dwuprzewodowej linii przesyłowej o pojemności 0.1pF/cm, jeżeli odległość d = 5cm? (notatki; Jackson zad. 1.7).

7. **Siła działająca na powierzchnię przewodnika**: Izolowana powierzchnia kulista o promieniu a znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym $\vec{E}_o$. Powierzchnię przecięto na dwie półkule płaszczyzną prostopadłą do kierunku pola $\vec{E}_o$. Znaleźć siłę potrzebną do utrzymania półkul. Wyprowadzić, a ściślej odgadnąć (!!!) wzór na gęstość powierzchniową ładunku na powierzchni argumentując, że w stałym polu musi ona mieć charakter dipolowy $\sigma = \sigma_o \cos\theta$. Następnie wykorzystać zasadę superpozycji (pole dipola było treścią zadania 4 z serii III) oraz fakt, że powłoka ekranuje pole i zszyć pola na powierzchni. Podkreślić, że na mocy twierdzenia o jednoznaczności jest to właściwe i jedyne rozwiązanie.

8. **Energia pola**: Obliczyć pracę potrzebną do przesunięcia ładunku punktowego z nieskończoności do środka (wykorzystujemy zaniedbywalnie mały otwór) pustej przewodzącej czaszy o promieniu R i grubości t. Przedyskutować gêstość energii pola elektrycznego dla sytuacji, w której ładunek jest (i) w nieskończoności i (ii) wewnątrz. Pokazać, że rozbieżności w energiach układów związane z samooddziaływaniem kasują się, a różnica pochodzi wyłącznie od warstwy (patrz notatki).

Ćwiczenia V-VI
zagadnienia relatywistyczne[1]

1. **Elementy mechaniki relatywistycznej**: Wyprowadzić relatywistyczne prawa transformacji prędkości i przyspieszeń. Wypisać i omówić reguły transformacyjne dla składowych siły. Zwrócić szczególną uwagę na reguły transformacyjne z/do układu własnego.

2. **Pole poruszającego się ładunku punktowego**: Ładunek punktowy q porusza się (względem pewnego układu K) z prędkością $\vec{v} = v\vec{e}_x$. Znaleźć pole EM w układzie K w dowolnym punkcie $P(x, y, z)$. Znaleźć pole magnetyczne w układzie K w przybliżeniu nierelatywistycznym. Pokazać, że spełnia ono prawo Biota-Savarta. Pokazać, że $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$. Uogólnić ten wynik dowodząc, że jeżeli w pewnym układzie $\vec{E}' = 0$ (lub $\vec{B}' = 0$) to, w dowolnym innym układzie $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ (pola prostopadłe). [2]

3. **Pole wytwarzane przez układ nici**: Dwie prostoliniowe, równoległe nici naładowano z gęstościami odpowiednio λ_0 i λ_1 i umieszczono obok siebie (odległość między nimi zaniedbujemy). W pewnej chwili nić naładowaną z gęstością λ_0 wprawiono w ruch ze stałą prędkością v skierowaną wzdłuż nici. Z jaką stałą (wzdłuż nici) prędkością $\vec{u}$ powinna poruszać sie punktowa cząstka o ładunku q, aby jego odległość od nici pozostawała stała i równa d? Przedyskutować warunki, przy których problem ma rozwiązanie fizyczne.

4. **Pole wytwarzane przez układ płaszczyzn**: Dwie duże płyty (efekty brzegowe zaniedbujemy) równoległe do siebie poruszają się z taką samą stałą prędkością $\vec{v}$ równoległą do ich płaszczyzny. Górna płyta naładowana jest ładunkiem powierzchniowym σ, a dolna ładunkiem $-\sigma$ w układzie własnym płyt. Odległość między płytami wynosi d. Znaleźć pole EM w obszarze między płytami. Obliczyć siłę Lorentza działającą na ładunek punktowy q w obu układach tj. LAB i układzie własnym. Pokazać, że wynik jest zgodny z regułami transformacyjnymi dla siły (zwykłej). Przyjąć dla uproszczenia, że ładunek jest nieruchomy w układzie LAB.

5. **Pole wytwarzane przez walec**: Długi walec (efekty brzegowe zaniedbujemy) o promieniu a naładowano z gęstością objętościową ρ_o w układzie własnym. Walec wprawiono w ruch ze stałą prędkością v wzdłuż jego osi. Znaleźć siłę działającą na infinizemalny ładunek $dq = \rho_0 dV$ znajdujący się w odległości d od osi walca. Obliczenia wykonać transformując czterowektor prądu z układu własnego do LAB. Pola w LAB obliczyć korzystając z praw Gaussa i Ampera. Pokazać, że wyniki uzyskane tą metodą są konsystentne z wynikami otrzymanymi z transformacji pól i sił.

---

[1] W poniższych przykładach ograniczamy sie do pchnięć lorentzowskich wzdłuż jednej z osi układu współrzędnych. Efekty brzegowe zaniedbujemy!

[2] O niezmiennikach powiem na wykładzie, gdzie powołam się na ten przykład.

Ćwiczenia VII
Dynamika relatywistyczna (uzupełnienie). Prawa zachowania

1. **Dynamika relatywistyczna**: Cząstka o masie m i ładunku q znajduje się w jednorodnych polach elektrycznym i magnetycznym $\vec{E} = E\vec{e}_y$ i $\vec{B} = B\vec{e}_z$, takich że $E > cB$. [3] W chwili $t = 0$ cząstka spoczywa w środku układu współrzędnych. Znaleźć zależność położenia cząstki od czasu (własnego).

2. **Prąd przesunięcia Maxwella**: Kondensator próżniowy o kolistych, równoległych okładkach o promieniu r oddalonych od siebie na odległość d, ładujemy prądem stałym I przez pewien czas T, przez który na okładce zgromadzimy ładunek $Q = IT$. Zakładamy, że podczas ładowania ładunek rozkłada się równomiernie na okładkach z gęstością $\sigma(t)$, a prąd przesunięcia *płynie* w obszarze między okładkami. Oblicz energię zmagazynowaną w kondensatorze (między okładkami) w polach elektrycznym i magnetycznym w chwili $t < T$. Pokaż, że energia zgromadzona w polu magnetycznym jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z energią zgromadzoną w polu elektrycznym. Przedyskutuj dopływ energii do kondensatora korzystając z wektora Poyntinga. Oblicz pęd pola w trakcie ładowania kondensatora.

3. **Wektor Poyntinga:** Przez przewodnik walcowy o promieniu r i długości l płynie prąd o gęstości $\vec{j} = j\vec{e}_z$. Spadek napięcia na przewodniku wynosi V. Używając wektora Poyntinga obliczyć moc dostarczaną z baterii do przewodnika. Pokazać, że moc wydzielona w przewodniku wynosi $P = IV = RI^2$, gdzie R jest oporem przewodnika.

4. **Tensor napięć Maxwella:** Walec o promieniu R naładowano ładunkiem o gęstości liniowej λ, a następnie rozcięto wzdłuż płaszczyzny Oyz (patrz rysunek w notatkach). Oblicz siłę (na jednostkę długości) działającą na połowę walca, wykorzystując tensor napięć Maxwella. Wynik porównaj z rezultatem otrzymanym metodą tradycyjną tj. z siły Lorentza wykorzystując średnią arytmetyczną pól na powierzchni.

Ćwiczenia VIII
Specjalne metody elektrostatyki (I)

1. **Metoda obrazów:** Znaleźć potencjał wytwarzany przez ładunek punktowy q umieszczony w odległości $\vec{a}$ od środka przewodzącej, uziemionej sfery o promieniu $R < a$. Obliczyć gęstość powierzchniową i ilość ładunku zaindukowanego na sferze. Obliczyć siłę działającą na ten ładunek i pracę potrzebną do sprowadzenia ładunku q z nieskończoności do zadanego położenia (energię). Wykorzystując powyższy wynik wyznaczyć potencjał dla ładunku q w pobliżu izolowanej sfery, którą: **a)** naładowano ładunkiem Q; **b)** naładowano do potencjału V. Przedyskutować rozkłady ładunków obrazowych (tylko!!!) dla kilku prostych *geometrii* np. dla płaszczyzny z wybrzuszeniem w kształcie półsfery.

2. **Metoda funkcji Greena:**[4] Korzystając z metody funkcji Greena wyliczyć potencjał nad płaszczyzną $z = 0$, na której zadano potencjał:

$$V(x,y,z) = \begin{cases} V & \text{dla} \quad |x| \le a \\ 0 & \text{dla} \quad |x| > a \end{cases} \tag{9}$$

Sprawdzić ciągłość potencjału dla $z \to 0^+$. Obliczyć (wypisać) potencjał pod powierzchnią. Obliczyć gęstość powierzchniową ładunku $\sigma(x,y)$. Pokazać, że całka coulombowska dla obliczonego rozkładu $\sigma(x,y)$ jest rozbieżna (nieograniczony rozkład).

---

[3] $E > B$ w układzie Gaussa.

[4] Na wykładzie wyprowadziłem wzór na potencjał wyrażony przy pomocy funkcji Greena spełniającej warunki brzegowe Dirichleta. Na ćwiczeniach proszę wypisać to równanie bez dowodu.

3. **Separacja równania Laplace'a we współrzędnych kartezjańskich:** Znaleźć ogólne wyrażenie na potencjał wewnątrz prostopadłościanu o krawędziach a, b, c. Ściany prostopadłościanu (z wyjątkiem górnej) wykonane są z przewodnika i są od siebie odizolowane. Rozważyć sytuację ogólną kiedy na górnej ścianie prostopadłościanu zadano pewien potencjał $V(x, y, z = c)$, a pozostałe ściany uziemiono. Obliczyć całki dla szczególnego przypadku $V(x, y, z = c) = V$.

   Uwaga: Proszę przeprowadzić separację zmiennych, ponieważ na wykładzie nie planuję separacji zmiennych we współrzędnych kartezjańskich.

Ćwiczenia IX
Specjalne metody elektrostatyki (II)

1. **Separacja równania Laplace'a we współrzędnych biegunowych:** Znaleźć wyrażenie na potencjał wewnątrz długiego walca (układ traktujemy jako dwuwymiarowy) wykonanego z przewodnika. Walec rozcięto na dwie połowy, które odizolowano od siebie, a nastepnie jedną z nich naładowano do potencjału $-V$, a drugą do potencjału V.

   Uwaga: Separacja zmiennych we współrzędnych biegunowych była na wykładzie wraz z dyskusją pól w narożnikach.

2. **Przekształcenia konforemne:** [5] Pokazać, że układ dwuwymiarowy (*pola płaskie*) w przestrzeni wolnej od ładunków można opisać przy pomocy potencjału zespolonego $w(z) = A_E + i\varphi$ gdzie $\vec{A}_E = A_E\vec{e}_z$ jest potencjałem wektorowym pola elektrycznego. Pokazać następnie, że $w(z)$ jest funkcją analityczną tj. spełnia warunki Cauchego-Riemanna. Podać interpretację linii $\mathbf{Re}w(z) = const$ i $\mathbf{Im}w(z) = const$. Obliczyć potencjał zespolony w rozważanym przypadku. Pokazać jaki problem rozwiązuje funkcja holomorficzna:

$$w(z) = \sqrt{(z-a)^2 + h^2} + a, \quad \text{gdzie} \quad a > 0,\, h > 0 \tag{10}$$

   Znaleźć pole elektryczne i gęstość ładunku powierzchniowego. Naszkicować linie sił i powierzchnie ekwipotencjalne.

3. **Separacja równania Laplace'a we współrzędnych sferycznych:** Obliczyć potencjał i natężenie pola elektrycznego wytwarzane przez nienaładowaną sferę przewodząca o promieniu R umieszczoną w stałym, zewnętrznym polu elektrycznym $\vec{E} = E_o\vec{e}_z$. Obliczyć gęstość ładunku indukowanego na powierzchni sfery.

   Uwaga: Separacja zmiennych we współrzędnych sferycznych była na wykładzie wraz z dyskusją funkcji Greena dla zagadnienia zewnętrznego typu Dirichleta na sferze.

4. **Rozwinięcie multipolowe:** Uzasadnić, że dla rozkładu ładunków punktowych o gęstości zadanej wzorem:

$$\rho(\vec{r}) = q\left[\delta(\vec{r} - a\vec{e}_z) + \delta(\vec{r} + a\vec{e}_z) - 2\delta(\vec{r})\right]$$

   wiodący wkład do potencjału w strefie dalekiej $r \gg a$ jest typu kwadrupolowego. Obliczyć składowe bezśladowego tensora kwadrupolowego Q_{ij} i wkład kwadrupolowy do potencjału.

5. **Separacja równania Laplace'a we współrzędnych sferycznych z wyizolowanym ładunkiem punktowym:** Wewnątrz przewodzącej kuli o promieniu R wydrążono wnękę kulistą o promieniu r_a, w środku której umieszczono ładunek punktowy q. Środek wnęki znajduje się w odległości a od środka kuli. Znaleźć potencjał w całej przestrzeni oraz ładunek wyindukowany na powierzchni kuli i powierzchni wnęki w przypadku gdy: (i) kula jest uziemiona; (ii) kula jest izolowana i obojętna; (iii) kula jest izolowana i naładowana ładunkiem Q. Uogólnić rozwiązanie na przypadek dwóch (lub większej liczby) rozłącznych wnęk.

---

[5] Przekształcenia konforemne traktujemy jako materiał nieobowiązkowy. W przypadku braku czasu proszę omówić teorię, ale nie robić poniższego przykładu. Teorię można powiązać z pierwszym zadaniem.

6. **Sfera poruszająca się ze stałą prędkością w stałym polu magnetycznym:** Doskonale przewodząca sfera o promieniu R porusza się przez jednorodne pole magnetyczne $\vec{B} = B\vec{e}_y$ ze stałą prędkością $\vec{v} = v\vec{e}_x$, przy czym $v \ll c$. Znaleźć gęstość ładunku powierzchniowego indukowanego na sferze, uwzględniając tylko efekty wiodące tj. liniowe w v/c.

Ćwiczenia X
Elektrostatyka w ośrodkach materialnych

1. **Metoda obrazów:** Ładunek punktowy umieszczono w odległości d od płaszczyzny rozdziału dwóch liniowych, jednorodnych ośrodków o stałych dielektrycznych ε_1 i ε_2. Obliczyć potencjał w całej przestrzeni i gęstości powierzchniowe ładunków związanych na powierzchniach dielektryków.

2. **Metoda separacji zmiennych:** Przewodzącą kulę o promieniu R_2 naładowano ładunkiem Q. Kula znajduje się w ośrodku o stałej dielektrycznej ε_2. Wewnątrz kuli wydrążono kulisty otwór o promieniu $R_1 < R_2$ i środku w środku kuli. Otwór ten wypełniono materiałem dielektrycznym o przenikalności ε_1, a w jego środku umieszczono punktowy dipol o momencie dipolowym $\vec{p}$. Wyznaczyć potencjał w całej przestrzeni oraz gęstości powierzchniowe ładunków swobodnych i związanych na powierzchniach. Obliczyć energię zgromadzaną w polu elektrycznym na zewnątrz kuli przewodzącej.

   Przedyskutować jakościowo jak należy rozwiązać zadanie w sytuacji, w której środek wydrążenia wraz z umieszczonym tam dipolem są przesunięte względem środka kuli o $\vec{a} = a\vec{e}_z$, gdzie $R_1 + a < R_2$.

3. **Ośrodek anizotropowy:** Równoległe przewodzące płyty o powierzchni A każda znajdują się w odległości d tj. tworzą kondensator płaski. Obszar pomiędzy płytami wypełniono liniowym, anizotropowym dielektrykiem o tensorze przenikalności dielektrycznej $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$ w taki sposób, że jedna z osi głównych tensora (oś 3) jest równoległa do okładek kondensatora, zaś osie 1 i 2 skierowane są pod kątami, odpowiednio, θ i $\frac{\pi}{2} - \theta$ do odcinka łączącego okładki. Na płytach umieszczono ładunki $\pm Q$. Znajdź składowe pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcji $\vec{D}$. Oblicz pojemność kondensatora i energię zgromadzoną w polu elektrycznym.

Ćwiczenia XI i XII
Magnetostatyka w próżni i w ośrodkach materialnych; prądy; prawo Faradaya [6]

1. **Moment dipolowy:** Punktowy dipol magnetyczny o momencie $\vec{m}$ umieszczono w tzw. sekstupolowej soczewce magnetycznej o składowych indukcji:

$$B_x = \alpha(x^2 - y^2), \qquad B_y = -2\alpha xy, \qquad B_z = 0 \tag{11}$$

   gdzie z jest osią soczewki zaś α stałą charakteryzującą soczewkę. Obliczyć składowe siły działające na dipol. Czy jedna lub kilka takich soczewek może być wykorzystanych do ogniskowania strumienia neutralnych czastek posiadających dipolowy moment magnetyczny np. neutronów? Odpowiedź uzasadnij.
   Proszę wypisać, powołując się np. na podręcznik Griffithsa, wzory na siłę, moment siły i energię dipola magnetycznego (i elektrycznego) w polu $\vec{B}$ ($\vec{E}$). Część z nich, w wersji dla ramki z prądem liniowym, pojawi się w zadaniu 7 tej serii

2. **Prawo Biota-Savarta:** Korzystając bezpośrednio z prawa Biota-Savarta obliczyć indukcję pola magnetycznego wzdłuż osi symetrii pierścienia, przez który przepływa prąd I [7] Wykorzystując powyższy wynik i zasadę superpozycji obliczyć pole na osi ciasno nawiniętego solenoidu o długości L i N zwojach.

---

[6] Zadania 6, 7 i 8 będą wymagały krótkiego wprowadzenia teoretycznego (według dostarczonych notatek).

[7] Prosze podkreślić konieczność wyrażenia wersorów w układach krzywoliniowych przez wersory kartezjańskie przy obliczaniu całek!!!.

3. **Metoda potencjału magnetycznego:** Kula naładowana z gęstością powierzchniową σ wiruje wokół średnicy z częstością ω. Oblicz, korzystając z metody potencjału skalarnego, pole $\vec{H}$ i indukcję $\vec{B}$ w całej przestrzeni. Przenikalność magnetyczna kuli wynosi μ.
To zadanie należy zrobić na końcu lub przesunąć do zadań domowych

4. **Osłona magnetyczna:** Walcową osłonę magnetyczną o promieniach $R_1 < R_2$ i przenikalności $\mu \gg \mu_o$ umieszczono w zewnętrznym jednorodnym polu magnetycznym $\vec{B}$ prostopadłym do jej osi. Pokazać, że pole magnetyczne wewnątrz jest ekranowane tj. jest rzędu $\mathcal{O}(\frac{\mu_o}{\mu})$.
To zadanie jest dość pracochłonne. Rozwiązując je pomińcie niektóre szczegóły techniczne dotyczące zszycia. Skoncentrujcie się na aspektach fizycznych.

5. **Metoda obrazów:** Nieskończony prosty przewód z prądem umieszczony jest równolegle do płaskiej granicy rozdzielającej dwa ośrodki o przenikalnościach magnetycznych μ_1 i μ_2. Odległośc przewodu od granicy rozdziału wynosi a. Znaleźć pole magnetyczne w całej przestrzeni.
Batygin i Toptygin, zadanie 280.

6. **Prądy:** Przestrzeń między dwoma koncentrycznymi sferycznymi przewodnikami o promieniach $a < b$ wypełniono dielektrykiem o przenikalności ϵ i przewodności właściwej κ. W chwili $t = 0$ na wewnętrznej okładce umieszczono ładunek q. Znajdź całkowity prąd przepływający przez dielektryk w funkcji czasu oraz ciepło, które wydzieli się przy przepływie tego prądu.

7. **Prawo Faradaya:** Prostokątna ramka o wymiarach a i b obraca się z prędkością kątową ω wokól osi symetrii. Ramkę umieszczono w stałym polu $\vec{B} = B\vec{e}_y$ prostopadłym do osi obrotu. Znaleźć średni moment hamujący ramkę.

8. **Samoindukcja:** Rozważyć kabel koncentryczny składający się z przewodnika walcowego o promieniu a i przenikalności μ_1 i ze współosiowego przewodnika cylindrycznego o promieniu $b > a$. Przestrzeń pomiędzy przewodnikami wypełniono izolatorem o podatności μ_2. Obliczyć współczynnik samoindukcji układu L na jednostkę długości przyjmując, że prądy w obu przewodnikach są identyczne co do modułu lecz przeciwnie skierowane.

Ćwiczenia XIII–XV

Fale elektromagnetyczne, potencjały retardowane, oscylujące źródła promieniowania

1. **Ciśnienie promieniowania:** Pokazać, że średnią po okresie iloczynu pól rzeczywistych:

$$f(\vec{r},t) = f_o \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_f) \tag{12}$$
$$g(\vec{r},t) = g_o \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \delta_g) \tag{13}$$

można zapisać w postaci

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tilde{f}\tilde{g}^*) \tag{14}$$

gdzie $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ są polami f i g w notacji zespolonej. Zastosować powyższą metodę do obliczenia uśrednionej po okresie gęstości energii, strumienia energii (wektora Poyntinga), natężenia oraz ciśnienia promieniowania dla monochromatycznej fali płaskiej. Korzystając z uzyskanych wzorów oszacować natężenie światła i ciśnienie promieniowania lasera wysokiej mocy działającego na długości fali 1.6μm i dającego energię 10kJ w impulsie 0.2ns. Przyjąć, że wiązka lasera ma średnicę 0.5mm.

2. **Rozwiazanie równania falowego:** Znaleźć falę elektromagnetyczną wywoływaną przez warstwę prądową:

$$\vec{j}(\vec{r},t) = j_o\delta(z)e^{i(k_y y - \omega t)}\vec{e}_x \tag{15}$$

gdzie j_o, k_y i ω są stałymi.

3. **Lustro:** Monochromatyczna fala płaska o częstości ω pada prostopadle z próżni na warstwę dielektryka (szkło) o grubości d i przenikalnościach ε, μ, na którą, po drugiej stronie, napylono warstwę *idealnego* przewodnika. Wyznaczyć pola $\vec{E}$ i $\vec{B}$ w całej przestrzeni oraz gęstość prądu powierzchniowego w metalu.

4. **Kąt Brewstera, polaryzator:** Fala spolaryzowana kołowo pada pod kątem Brewstera na granicę nieferromagnetycznych ośrodków dielektrycznych o $\mu_1 = \mu_2$ i współczynnikach załamania n_1 i n_2 (z optycznie gęstszego do rzadszego). Wyznaczyć polaryzację fali odbitej.
Proszę przedyskutować to zadanie jakościowo. Wzory Fresnela dla obu polaryzacji liniowych tj. stycznej do płaszczyzny padania i stycznej do płaszczyzny rozdziału były dyskutowane na wykładzie.

5. **Promieniowanie:** Znaleźć rozkład kątowy promieniowania i całkowitą wypromieniowaną moc dla następujących układów:

   (a) Ładunek q równomiernie rozłożony na kropli która pulsuje zgodnie z wzorem:

   $$R = R_o \left\{1 + a\cos(\omega t)\right\} \quad \text{gdzie} \quad a \ll 1 \tag{16}$$

   (b) Cienka antena liniowa o długości d wzbudzona biegnącą falą prądu

   $$I = I_o e^{i(kz-\omega t)} \quad \text{gdzie} \quad k = \frac{\omega}{c} \tag{17}$$

6. **Promieniowanie:** W cienkim drucie w kształcie okręgu o promieniu R płynie prąd

   $$j(\varphi', t) = j_o e^{-i\omega t} \sin(n\varphi') \tag{18}$$

   gdzie j_o i ω są stałymi zaś n jest ustaloną liczbą naturalną. Obliczyć pole elektromagnetyczne w dużych odległościach od środka okręgu oraz kątowy rozkład natężenia promieniowania przy założeniu, że $kR \ll 1$ gdzie $k = \frac{\omega}{c}$.

Wojciech Satuła