

## II seria zadań domowych z elektrodynamiki klasycznej (2011/12)

**Zadanie 1.** Wykonać następujące całki bezpośrednio oraz korzystając z tw. Gaussa lub Stokes'a:

- a)  $\int_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ , gdzie  $S$  jest zewnętrzną częścią sześcianu:  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq a$ .
- b)  $\int_C 6dx + yz^2 dy + (3y + z)dz$ , gdzie  $C$  jest trójkątem, o wierzchołkach:  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$  (których kolejność określa również kierunek całkowania).

**Zadanie 2.** Potencjał wytwarzany przez neutralny atom wodoru w stanie podstawowym dany jest wzorem:

$$\phi = \frac{qe^{-2r/a_0}}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 + \frac{r}{a_0} \right),$$

gdzie  $q$  jest ładunkiem elementarnym a  $a_0$  promieniem Bohra. Znaleźć rozkład ładunku wytwarzającego ten potencjał i podaj interpretację fizyczną otrzymanego wyniku (uważaj na niespodzianki w  $r = 0$ ).

**Zadanie 3.** Obliczyć następujące całki:

- a)  $\int_{-2}^2 (2x + 3)\delta(3x) dx$
- b)  $\int_{-1}^1 9x^2\delta(3x + 1) dx$
- c)  $\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\cos x) dx$
- d)  $\int (r^2 + \vec{r} \cdot \vec{a})\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{a}) dV$
- e)  $\int e^{-r} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\hat{e}_r}{r^2} \right) dV$

gdzie w ostatnich dwóch przykładach całkowanie odbywa się po całej przestrzeni.

**Zadanie 4 (nadobowiązkowe).** Rozważmy kulę o promieniu  $R$  i środku w początku układu współrzędnych. Niech ładunek  $q$  znajduje się w punkcie  $\vec{s}$  gdzie  $|\vec{s}| < R$ .

- a) Udowodnić, że uśrednienie pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek  $q$  po całej objętości kuli jest równoważne obliczeniu pola elektrycznego w punkcie  $\vec{s}$  w sytuacji, gdyby kula była jednorodnie naładowana z gęstością ładunku  $\rho = -q/(\frac{4}{3}\pi R^3)$
- b) Korzystając z powyższego faktu oraz prawa Gaussa pokazać, że średnie pole elektryczne wewnątrz kuli pochodzące od ładunku  $q$  wynosi:

$$\vec{E}_{\text{sr}} = -\frac{q\vec{s}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Z powyższego faktu oraz zasady superpozycji wynika następujące stwierdzenie. Średnie pole elektryczne wewnątrz kuli pochodzące od rozkładu ładunków wewnątrz niej wynosi:

$$\vec{E}_{\text{sr}} = -\frac{\vec{d}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

gdzie  $\vec{d}$  jest momentem dipolowym rozkładu ładunku wewnątrz kuli.

- c) Potencjał punktowego dipola umieszczonego w środku układu współrzędnych o momencie dipolowym  $\vec{d}$  wynosi

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3}.$$

Przy naiwnym obliczeniu pola elektrycznego dipola otrzymujemy wyrażenie

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ 3(\vec{d} \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{d} \right]$$

Uzasadnić, że powyższy wzór nie może być poprawny, gdyż średnie pole wewnątrz kuli o promieniu  $R$  nie spełnia udowodnionego wcześniej twierdzenia.

- d) Pokazać, że dodanie członu  $-\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{d}\delta^{(3)}(\vec{r})$  do wyrażenia na pole elektryczne dipola rozwiązuje sprzeczność.