

Mechanika Klasyczna 2019/2020

9. seria zadań domowych - rozwiązania 11.12.2019

Zad. 1

Znaleźć środek masy, osie i momenty główne jednorodnego ostrosłupa prawidłowego o masie M o wysokości h o podstawie trójkąta równobocznego o boku a względem (a) wierzchołka (b) środka masy. Kiedy momenty staną się równe w przypadku (b)?

Środek masy w odległości $3h/4$ od wierzchołka na wysokości ostrosłupa (jak dla stożka). Momenty względem wierzchołka

$$I'_z = ma^2/20, I'_x = I'_y = m(a^2/40 + 3h^2/5)$$

Względem środka masy $I'_x = I'_y = m(a^2/40 + 3h^2/80)$ stają się równe I'_z dla $h = a\sqrt{2/3}$ czyli dla czworościanu formenego.

Zad. 2

Na górkim tartaku drzewo (jednorodny walec o promieniu r i masie m) zaczęło się staczać po zboczu o kształcie powierzchni walcowej o promieniu R . Na jakiej wysokości oderwie się od zbocza, jeśli na szczycie zbocza miało prędkość v_0 ?

Energia kinetyczna

$$T = mv^2/2 + I\omega^2/2 \quad I = mr^2/2$$

Oś obrotu jest na styku czyli $v = r\omega$, a stąd $T = 3mv^2/4$. Z zachowania energii $E = T + V = 3mv^2/4 + mgh = 3mv_0^2/4 + mg(R + r)$. Siła dośrodkowa dla środka masy $mv^2/(R + r)$ a składowa normalna grawitacji $mgh/(R + r)$. Oderwanie nastąpi kiedy te siły się zrównają czyli

$$h = v_0^2/g + 4(R + r - h)/3$$

czyli $7h/3 = v_0^2/g + 4(R + r)/3$

Zad. 3

Drzewo z poprzedniego zadania przecięto na pół wzdłuż. Z jaką częstością połówka będzie się kołysać bez poślizgu na poziomej powierzchni, w granicy małych drgań w polu g ?

Wskazówka: Znaleźć najpierw położenie środka masy. Potem można skorzystać z formalizmu Lagrange'a lub sił reakcji.

Środek masy jest w płaszczyźnie symetrii półwalca w odległości $a = 4r/3\pi$ od osi walca. Niech kąt ϕ oznacza wychylenie od poziomu (dla płaszczyzny cięcia). Energia kinetyczna jest równa energii obrotowej wokół chwilowej osi obrotu, linii styku. Moment bezwładności względem osi walca $I = mr^2/2$. Moment względem styku $I_S = I - ma^2 + m(a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi)$ (wykorzystaliśmy twierdzenie cosinusów), stąd $T = I_S \dot{\phi}^2/2 = m(3r^2/4 - ar \cos \phi) \dot{\phi}^2$. Energia potencjalna $V = -mga \cos \phi$. Rozwijając dla małych ϕ i pomijając stałą

$$L = m(3r^2/4 - ar) \dot{\phi}^2 - mga \phi^2/2$$

co daje częstość

$$\Omega^2 = \frac{2ga}{3r^2 - 4ar} = \frac{8g/r}{9\pi - 16}$$

Zad. 4

Po równi pochyłej poruszają się bezwładnie: rowerzysta (2 koła i rama) bez poślizgu, jedno koło rowerowe bez poślizgu, i narciarz bez tarcia. Kto/co zjedzie najszybciej a kto/co najwolniej i dlaczego?

Policzmy energię w zależności od prędkości liniowej (np. środków kół), $v = \omega r$ dla promienia koła r . Koło $T = (I/r^2 + m)v^2/2$, rower $T = (2I/r^2 + 2m + M)v^2/2$ gdzie I to moment bezwładności koła względem jego osi, m masa koła, M masa ramy (narciarza). Dla koła $2T/mv^2 = (1 + I/mr^2)$, dla roweru $2T/(M + 2m)v^2 = (1 + I/(m + M/2)r^2)$ a dla narciarza $2T/Mv^2 = 1$. Energia kinetyczna uzyskiwana jest z potencjalnej mgh , $(M + 2m)gh$ lub Mgh . Zatem najmniejszy stosunek energii na jednostkę masy do kwadratu prędkości ma narciarz i to on zjedzie najszybciej, potem rower a na końcu koło.

Serię przygotował Adam Bednorz