

Mechanika Klasyczna 2019/2020
8. seria zadań domowych
7.12.2019

Zad. 1 (Tożsamość Jacobiego dla nawiasów Poissona)

$$\{A, \{B, C\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$$

Mamy

$$\begin{aligned} \{A, \{B, C\}\} &= \sum_{ij} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial B}{\partial q_j} \frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial C}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial B}{\partial q_j} \frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial C}{\partial q_j} \right) \right] \\ &= \sum_{ij} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 B}{\partial p_i \partial q_j} \frac{\partial C}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 B}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial q_j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 B}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_j} \frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 B}{\partial q_i \partial p_j} \frac{\partial C}{\partial q_j} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial q_j} \right) \end{aligned}$$

Uwzględniając zamiany $i \leftrightarrow j$, równość pochodnych krzyżowych $\partial^2/\partial x \partial y$ i przegrupowując składniki i iloczyny możemy zapisać powyższą sumę

$$\begin{aligned} &= \sum_{ij} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial^2 B}{\partial p_i \partial q_j} \frac{\partial C}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial q_j} \frac{\partial A}{\partial p_j} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial C}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial^2 B}{\partial p_i \partial p_j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial^2 B}{\partial q_i \partial p_j} \frac{\partial C}{\partial q_j} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial p_j} \frac{\partial A}{\partial q_j} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial^2 C}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial C}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial^2 B}{\partial q_i \partial q_j} \right) \end{aligned}$$

Jeśli teraz dodamy z cyklicznym przesunięciem $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ (2 razy) to powyższe wyrazy skasują się parami.

Zad. 2

$$A_1 = q \cdot q, \quad A_2 = p \cdot p, \quad A_3 = q \cdot p$$

$$\{A_1, A_2\} = 4A_3, \quad \{A_1, A_3\} = 2A_1, \quad \{A_3, A_2\} = 2A_1$$

Zad. 3 (Maszyna Atwooda ze sprężyną)

$$2T = m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 \quad V = m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + k(x_1 - x_2)^2/2$$

$$p_1 = m_1 \dot{x}_1, \quad p_2 = m_2 \dot{x}_2$$

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = T + V = p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 + m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + k(x_1 - x_2)^2/2$$

$$\dot{x}_1 = p_1/m, \quad \dot{x}_2 = p_2/m, \quad \dot{p}_1 = -mg - k(x_1 - x_2), \quad \dot{p}_2 = mg - k(x_2 - x_1)$$

Zad. 4 Ruchoma ściana

$$T = m\dot{x}^2/2, \quad V = k(x - A \sin \omega t)^2/2$$

$$p = m\dot{x}, \quad H(x, p) = T + V = p^2/2m + (k(x - A \sin \omega t)^2)/2, \quad \dot{x} = p/m, \quad \dot{x} = -k(x - A \sin \omega t)$$

H nie jest zachowane bo zależy jawnie od czasu.

Zad. 5 (Efekt Starka)

Współrzędne paraboliczne

$$x = 2\xi\eta \cos \phi, \quad y = 2\xi\eta \sin \phi, \quad z = \xi^2 - \eta^2$$

Wtedy

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 4(\xi^2 + \eta^2)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + 4\xi^2\eta^2\dot{\phi}^2$$

$$T = mv^2/2$$

$$V = -Ze^2/4\pi\epsilon_0 r + eEz = -Ze^2/4\pi\epsilon_0(\xi^2 + \eta^2) + eE(\xi^2 - \eta^2)$$

W tym przypadku

$$p_\xi = \partial T / \partial \dot{\xi} = 4m(\xi^2 + \eta^2)\dot{\xi}, \quad p_\eta = \partial T / \partial \dot{\eta} = 4m(\xi^2 + \eta^2)\dot{\eta}, \quad p_\phi = 4m\xi^2\eta^2\dot{\phi}$$

czyli

$$H = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2 - 2mZe^2/\pi\epsilon_0}{8m(\xi^2 + \eta^2)} + eE(\xi^2 - \eta^2) + p_\phi^2/8m\xi^2\eta^2$$

Ponieważ H nie zależy od ϕ to p_ϕ jest stałą. Stałą jest także H . Możemy zapisać

$$H = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2 - 2mZe^2/\pi\epsilon_0 + eE(\xi^4 - \eta^4) + p_\phi^2(\xi^{-2} + \eta^{-2})}{8m(\xi^2 + \eta^2)}$$

otrzymujemy więc dodatkową stałą ruchu

$$c_\xi = p_\xi^2 + eE\xi^2 + p_\phi^2/\xi^2 - 8mH\xi^2$$

oraz

$$c_\eta = p_\eta^2 - eE\eta^2 + p_\phi^2/\eta^2 - 8mH\eta^2$$

przy czym $c_\xi + c_\eta = 2mZe^2/\pi\epsilon_0$