

Mechanika klasyczna 2019/2020

Zadania domowe – seria 8.
7 grudnia 2019 r.

Zadanie 1. (Tożsamość Jacobiego dla nawiasu Poissona)

Niech wielkości A , B i C będą dowolnymi funkcjami współrzędnych uogólnionych q_i , pędów uogólnionych p_i i czasu t ($i = 1, 2, \dots, f$, gdzie f jest liczbą stopni swobody rozważanego układu mechanicznego). Wykazać bezpośrednim rachunkiem tożsamość Jacobiego dla nawiasu Poissona:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

Zadanie 2.

Rozważmy układ mechaniczny o dwóch stopniach swobody, którego stan opisywany jest współrzędnymi uogólnionymi $q = (q_1, q_2)$ i pędami uogólnionymi $p = (p_1, p_2)$. Niech

$$\begin{aligned} A_1 &= q^2 = q_1^2 + q_2^2, \\ A_2 &= p^2 = p_1^2 + p_2^2, \\ A_3 &= q \cdot p = q_1 p_1 + q_2 p_2. \end{aligned}$$

Wyznaczyć wszystkie nawiasy Poissona $\{A_i, A_j\}$ i wyrazić je w postaci

$$\{A_i, A_j\} = c_{ij}^k A_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

gdzie c_{ij}^k są pewnymi stałymi współczynnikami (we wzorze tym obowiązuje konwencja sumacyjna Einsteina).

Zadanie 3. (Maszyna Atwooda ze sprężyną)

Nieważka i nierozciągliwa nić została przerzucona przez bloczek o zaniedbywalnie małej masie. Bloczek ten nie wykonuje ruchu postępowego, może jednak obracać się bez tarcia wokół swojej osi. Do jednego z końców nici przymocowano sprężynę o stałej sprężystości k i długości swobodnej $l = 0$. Na końcu sprężyny zawieszono punkt materialny o masie m_1 , zaś na drugim końcu nici – punkt materialny o masie m_2 . Znaleźć hamiltonian tego układu i zapisać jego równania Hamiltona. Założyć, że sprężyna porusza się wyłącznie w kierunku pionowym.

Zadanie 4.

Punkt materialny o masie m , mogący poruszać się bez tarcia po poziomej, prostoliniowej szynie, został połączony za pomocą poziomej sprężyny o stałej sprężystości k i długości swobodnej l ze ścianą, która porusza się w tym samym kierunku. Ruch ściany opisany jest równością $X(t) = A \sin \omega t$, gdzie $X(t)$ jest położeniem ściany w chwili t , zaś A i ω są danymi parametrami. Znaleźć hamiltonian opisujący ruch punktu i zapisać równania Hamiltona. Czy hamiltonian jest w tym przypadku tożsamy z całkowitą energią? Czy jest on zachowany w trakcie ruchu? Czy energia jest zachowana?

Zadanie 5. (Efekt Starka)

Elektron o masie m_e i ładunku $q = -e$ porusza się w polu elektrycznym stanowiącym superpozycję pola wytwarzanego przez jądro atomowe o ładunku $Q = Ze$, gdzie Z jest liczbą atomową, oraz stałego zewnętrznego pola $\mathbf{E}$. Zapisać hamiltonian elektronu i znaleźć całki ruchu, wyrażając je przez kwadratury (tzn. zapisując w postaci całek, nie obliczając ich).

Wskazówka. Zastosować współrzędne paraboliczne i przeprowadzić separację zmiennych w hamiltonianie.

Zadania przygotował Bartłomiej Zglinicki.