

Mechanika Klasyczna 2019/2020

7. seria zadań domowych

26.11.2019

Zad. 1 Księżycy Kordylewskiego (Trojańczycy). W układzie Ziemia-Księżyc (obracającym się zgodnie z siłami grawitacji), sprawdzić że położenie ekstremum potencjału efektywnego od obu ciał (punkt Lagrange'a) znajduje się w wierzchołku trójkąta równobocznego, gdzie jeden z boków łączy ciała. Rozwiązując równania ruchu metodą małych drgań, sprawdzić że pomimo formalnej równowagi nietrwałej trzecie ciało w pobliżu tego punktu wykonuje oscylacje.

Niech bok trójkąta jest równy R . W układzie nieinercyjnym mamy układ 3 ciał położeniach $\mathbf{r}_j$ o masach m_j , $j = 1, 2, 3$ ($M = \sum_j m_j$) obraca się z prędkością kątową ω prostopadłą do trójkąta wokół nieruchomego środka masy w środku układu tj. $\sum_j m_j \mathbf{r}_j = 0$ taką że siłę odśrodkową równoważy grawitacja tj. w punktach $\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_j$ mamy

$$\mathbf{a}_3 = GR^{-3}(m_1 \mathbf{R}_{13} + m_2 \mathbf{R}_{23}) + \omega^2 \mathbf{R}_3 = 0$$

dla $\mathbf{R}_{jk} = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k$ czyli

$$\mathbf{a}_3 = (-GR^{-3}M + \omega^2)\mathbf{R}_3 = 0$$

co daje $\omega^2 = GM/R^3$ Rozwijamy ruch wokół punktów równowagi tj. $\mathbf{r}_j = \mathbf{R}_j + \mathbf{u}_j$

$$\ddot{\mathbf{u}}_1 = 3GR^{-5}(m_3 \mathbf{R}_{31}(\mathbf{R}_{31} \cdot \mathbf{u}_{13}) + m_2 \mathbf{R}_{21}(\mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{u}_{12})) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_1$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_2 = 3GR^{-5}(m_3 \mathbf{R}_{32}(\mathbf{R}_{32} \cdot \mathbf{u}_{32}) + m_1 \mathbf{R}_{12}(\mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{u}_{21})) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_2$$

Uwaga: pomijamy tu ruch w kierunku prostopadłym do trójkąta, gdzie ruch jest niezależny i oscylujący $\ddot{z}_j = -GMz_j/R^3$ Zauważmy że $\sum_j m_j \mathbf{u}_j = 0$ czyli $m_3 \mathbf{u}_3 = -m_1 \mathbf{u}_1 - m_2 \mathbf{u}_2$ czyli

$$\ddot{\mathbf{u}}_1 = 3GR^{-5}(m_2 \mathbf{R}_{21}(\mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{u}_{12}) + \mathbf{R}_{31}(\mathbf{R}_{31} \cdot (\mathbf{u}_1(m_3 + m_1) + \mathbf{u}_2 m_2))) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_1$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_2 = 3GR^{-5}(m_2 \mathbf{R}_{12}(\mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{u}_{21}) + \mathbf{R}_{32}(\mathbf{R}_{32} \cdot (\mathbf{u}_2(m_3 + m_2) + \mathbf{u}_1 m_1))) - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}}_2$$

Przyjmujemy teraz $\mathbf{u}_1 = e^{i\Omega t}(a, b)$, $\mathbf{u}_2 = e^{i\Omega t}(c, d)$ oraz $\mathbf{R}_{12} = (R, 0)$, $\mathbf{R}_{13} = (R/2, \sqrt{3}R/2)$, $\mathbf{R}_{32} = (R/2, -\sqrt{3}R/2)$ dostaniemy układ równań (dla uproszczenia $3GR^{-3} = 1$)

$$\begin{cases} a(\Omega^2 + m_2 + \frac{m_3+m_1}{4}) - 3c\frac{m_2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}(b(m_3 + m_1) + dm_2) + 2i\omega\Omega b = 0 \\ b\Omega^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(a(m_3 + m_1) + cm_2) + \frac{3}{4}(b(m_3 + m_1) + dm_2) - 2i\omega\Omega a = 0 \\ c(\Omega^2 + m_1 + \frac{m_3+m_2}{4}) - 3a\frac{m_1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}(bm_1 + d(m_3 + m_2)) + 2i\omega\Omega d = 0 \\ d\Omega^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(am_1 + c(m_3 + m_2)) + \frac{3}{4}(bm_1 + d(m_3 + m_2)) - 2i\omega\Omega c = 0 \end{cases}$$

Układ ma rozwiązanie (liniowe) jeśli wyznacznik współczynników powyższego układu czyli

$$\Omega^2(\Omega^2 - 4\omega^2 + M)(\Omega^4 - 4\Omega^2\omega^2 + \Omega^2 M + 3(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)/4)$$

jest równy 0. Przypadek $\Omega = 0$ uwzględnia możliwość obrócenia trójkąta, a także jego przeskalowania ze zmianą ω . Ponieważ $\omega^2 = GM/R^3 = M/3$ (wg naszej konwencji), więc pozostałe przypadki to $\Omega^2 = M/3$ lub

$$\Omega^2 - \Omega^2 M/3 + 3(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)/4 = 0$$

Równanie musi mieć pierwiastki Ω^2 rzeczywiste dodatnie, co nakłada warunek

$$M^2 \geq 27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1)$$

Jeśli $m_1 \ll m_{2,3}$ to można zaniedbać m_1 , c i d i mamy układ tylko 2 równań

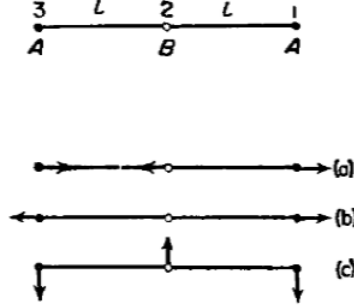
$$\begin{cases} a(\Omega^2 + m_2 + m_3/4) + \frac{\sqrt{3}}{4}bm_3 + 2i\omega\Omega b = 0 \\ b\Omega^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}am_3 + \frac{3}{4}bm_3 - 2i\omega\Omega a = 0 \end{cases}$$

skąd równanie przy $M = m_2 + m_3$

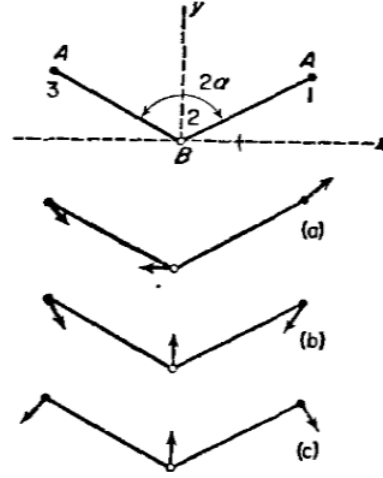
$$\Omega^4 + M\Omega^2 - 4\Omega^2\omega^2 + 3m_2m_3/4 = 0$$

dające warunek $M^2 \geq 27m_2m_3$

Zad. 2 Wyznaczyć częstość drgań liniowej trójatomowej cząsteczki symetrycznej ABA zakładając, że energia potencjalna cząsteczki zależy tylko od odległości AB i BA, a nie od kąta ABA (rysunek 1)



rysunek 1



rysunek 2

Zad. 3 Zadanie poprzednie dla cząsteczki ABA o kształcie trójkątnym (rysunek 2)

Rozwiązanie: Zakładamy że odległość ℓ jest równowagowa i dlatego

$$V \simeq k[(\Delta\ell_{12})^2 + (\Delta\ell_{23})^2]$$

Z kolei $\Delta\ell_{12} \simeq \ell(\sqrt{1 + 2\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{n}_{12}/\ell} - 1) \simeq (\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{n}_{12})^2/\ell$ gdzie $\mathbf{r}_{12}$ jest względnym wychyleniem a $\mathbf{n}_{12} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ kierunkiem połączenia. Zatem

$$\ell V/k \simeq ((x_1 - x_2) \cos \alpha + (y_1 - y_2) \sin \alpha)^2 + ((x_2 - x_3) \cos \alpha - (y_1 - y_2) \sin \alpha)^2$$

A energia kinetyczna $m_A(v_1^2 + v_3^2)/2 + m_B v_2^2/2$.

Z ruchu możemy wyeliminować jednostajny ruch środka masy, ustawiając $m_A(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) + m_B \mathbf{r}_2 = 0$ czyli $m_A(x_1 + x_3) = -m_B x_2$, $m_A(y_1 + y_3) = -m_B y_2$. Dostajemy równania ruchu dla $x_{13} = x_1 - x_3$, $y_{13} = y_1 - y_3$, x_2 , y_2

$$m_A \ddot{x}_{13} / \cos \alpha = -(x_{13} \cos \alpha - (2 + m_B/m_A) y_2 \sin \alpha) k / \ell = -m_B \ddot{y}_2 / \sin \alpha$$

$$m_A \ddot{y}_{13} / \sin \alpha = -(y_{13} \sin \alpha - (2 + m_B/m_A) x_2 \cos \alpha) k / \ell = -m_B \ddot{x}_2 / \cos \alpha$$

Dostajemy mody o zerowej częstości, $x_{13} = (2 + m_B/m_A) y_2 \tan \alpha$ albo $y_{13} \tan \alpha = (2 + m_B/m_A) x_2$. Pozostałe mody $y_2 = -m_A x_{13} \tan \alpha / m_B$ albo $y_{13} = -m_B x_2 \tan \alpha / m_A$ dają częstości ω^2 odpowiednio $(1/m_A + 2 \sin^2 \alpha / m_B) k / \ell$ albo $(1/m_A + 2 \cos^2 \alpha / m_B) k / \ell$

Zad. 4 (dla chętnych) Określić położenie równowagi trwałej wahadła (Kapicy), którego punkt zawieszenia wykonuje pionowe drgania z dużą częstością γ ($\gamma \gg \sqrt{g/l}$)

Wskazówka: Kąt ϕ zapisać jako sumę części wolnozmiennnej $\phi_0(t)$ i szybkozmiennnej $(a/l) \sin \phi_0 \cos \gamma t$

Rozwiązanie (przybliżone):

Ośylacja zawieszenia $y = a \cos \gamma t$, położenie wahadła $(l \sin \phi, y + l \cos \phi)$ i potencjał $V = -mg(y + l \cos \phi)$, energia kinetyczna $T = mv^2/2 = ml^2 \dot{\phi}^2/2 + mla\gamma \dot{\phi} \sin \phi \sin \gamma t$ co daje równanie ruchu

$$l\ddot{\phi} = -(g + a\gamma^2 \cos \gamma t) \sin \phi$$

Napiszmy $\phi = \phi_0 + (a/l) \sin \phi_0 \cos \gamma t$ Wtedy w przybliżeniu, pomijając szybko oscylujące części

$$l\ddot{\phi}_0 \simeq -g \sin \phi_0 - a\gamma^2 \cos^2 \gamma t \cos \phi_0 \simeq -(g + (a/2)\gamma^2 \cos \phi_0) \sin \phi_0$$

gdzie uśredniliśmy $\cos^2 \rightarrow 1/2$. Dla $(a\gamma)^2 > 2gl$ mamy dwa punkty równowagi trwałej $\phi_0 = 0, \pi$ a więc wahadło może stabilnie oscylować pionowo w górę.